CAPACIDAD Y CAPACITORES

La Capacidad es la propiedad que tiene un objeto para retener carga eléctrica.

Un capacitor es un dispositivo que retiene carga de manera muy efectiva. Consiste en poner dos conductores a una diferencia de potencial y separarlos una cierta distancia. El conductor a potencial más alto se carga con carga Q y el otro con $-Q$. La Capacidad de un capacitor queda definida como:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{1}$$

Donde Q es la carga retenida en el capacitor, y ΔV es la diferencia de potencial entre los dos conductores.

La Capacidad C depende únicamente de la geometría del capacitor, y del medio entre los conductores. Por ahora solo vamos a ver casos donde el medio es el vacío.

La energía almacenada en un capacitor tiene la forma

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \tag{2}$$

8. Calcular la capacidad de las siguientes configuraciones de conductores:
   - Una esfera de radio R en el vacío; dar el valor de R que haga $C = 1$ pF.
   - Un condensador esférico de radio interior a y exterior b. Comparar con el resultado anterior para b muy grande.
   - Por unidad de longitud, para un condensador cilíndrico infinito.
   - Por unidad de área, para un condensador plano infinito; si la separación entre placas es de 1 mm, dar el valor del área para que $C = 1$ F.

Problema 8 a: Calcular la capacidad de una esfera conductora maciza de radio R, en el vacío.

El problema no da datos de carga ni de potencial. Está bien porque debería llegar a una expresión para C que solo dependa de la geometría y el medio.
Puedo elegir entonces, dos maneras de resolverlo:

1) Elegir como 'dato' la carga Q contenida en la esfera. Este es el caso de resolución fácil y rápida, pero más irreal.

2) Elegir como 'dato' el potencial V_0 sobre la esfera. Este es el caso más cuentoso de resolver, pero más real.

En la vida real nadie habla de cuánta carga tiene una batería por ejemplo, sino de cuántos volts (unidad de potencial) es. Por eso la distinción entre ambos casos.

Empecemos por el fácil. Conocemos la carga Q de la esfera.

Debido a la simetría esférica del problema, sabemos que el potencial toma forma del de una carga puntual Q, y solo depende de la coordenada radial r

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{3}$$

para $r > R$.

La forma rigurosa para llegar a esta última expresión es encontrar el campo fuera de la esfera usando Gauss, e integrar para obtener el potencial, como hizo Pablo en la teórica.

Para $r \leq R$, el potencial vale

$$V_{esfera} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} \tag{4}$$

ya que la esfera maciza es conductora, y el potencial es el mismo en todos sus puntos.

Habíamos dicho que el potencial en el infinito valía cero.

Entonces, $\Delta V = V_{esfera} - V_{inf} = V_{esfera}$.

Y la capacidad es,

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_{esfera}} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R. \tag{5}$$

Ahora supongamos que en vez de conocer la carga, conocemos el potencial V_0 en la esfera.

Sabemos que la expresión del potencial fuera de la esfera va como $1/r$, pero no sabemos escribirlo sin usar el valor de la carga, que esta vez no conocemos.

La ecuación que resuelve el potencial es la de Poisson, que fuera de una distribución de cargas se convierte en la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 V = 0 \tag{6}$$

y nuestras condiciones de contorno son: $V(r \leq R) = V_0$, y $V(\infty)$=0.

En coordenadas esféricas la ecuación se escribe,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi} = 0 \tag{7}$$

Como mis condiciones de contorno valen para superficies de $r = cte$, puedo suponer que el potencial depende solamente de r (que en realidad ya lo sé), y tirar toda la parte no radial de la ecuación. Si la solución que obtengo usando esta suposición funciona, por unicidad sé que es la correcta. Entonces,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0 \tag{8}$$

Tiro el $1/r^2$ y me queda entonces,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0 \longrightarrow r^2\frac{dV}{dr} = cte = A \tag{9}$$

Paso el diferencial de r, y el r^2 e integro,

$$V(r) = \int \frac{A}{r^2}dr = -\frac{A}{r} + B \tag{10}$$

Tiene sentido: una ecuación diferencial de orden 2 me da 2 constantes de integración. Las puedo obtener porque tengo dos condiciones de contorno:

$$V(\infty) = B = 0 \longrightarrow B = 0 \tag{11}$$

entonces,

$$V(R) = -\frac{A}{R} = V_0 \longrightarrow A = -V_0 R \tag{12}$$

Y el potencial queda finalmente,

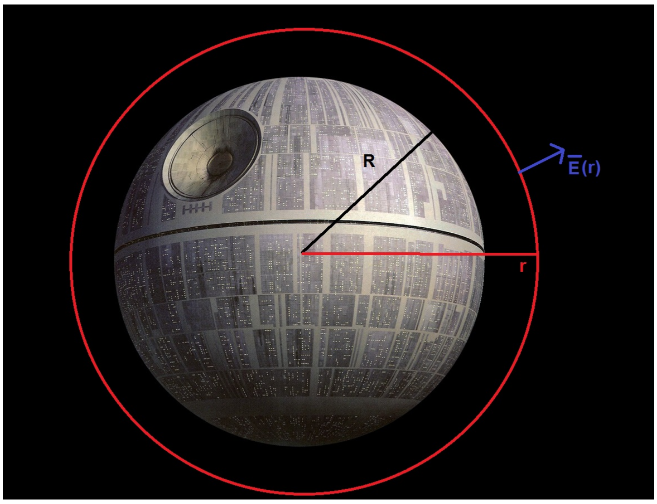
$$V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq R \\ \frac{V_0 R}{r} & r > R \end{cases} \tag{13}$$

Pregunta: ¿por qué calculé el potencial en todo el espacio si en la expresión de C solo necesito ΔV? (que es $\Delta V = V_0 - V_{inf} = V_0$)

Respuesta: Me falta calcular la carga Q, que la obtengo usando Gauss a partir del campo $\vec{E}$,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \frac{V_0 R}{r^2}\hat{r} & r > R \end{cases} \tag{14}$$

Ahora tomo una superficie esférica de Gauss de radio genérico r que encierra a toda la esfera conductora y aplico la ley de Gauss. La carga encerrada es la carga total de la esfera Q que quiero hallar:



$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{15}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{V_0 R}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} r^2 sin\theta d\theta d\phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{16}$$

El producto escalar da 1, los r^2 se cancelan, y la integral doble da 4π. Entonces,

$$Q = 4\pi\epsilon_0 V_0 R \tag{17}$$

Finalmente,

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R}{V_0} = 4\pi\epsilon_0 R \tag{18}$$

Que es el resultado que obtuve en (4). Es interesante ver como la capacidad de una esfera crece linealmente con su radio, y no con su volumen.

En los problemas de electrostática, generalmente se resuelve la ecuación de Laplace para el potencial, con dos tipos de condiciones de contorno: o sé la carga, o sé el potencial en algunas partes del espacio.

Problema 8 c: Capacidad por unidad de longitud de un capacitor cilíndrico infinito
El capacitor cilíndrico ya fue resuelto por Pablo en la teórica, dándole una altura h mucho mayor que la diferencia entre los radios de los cilindros:

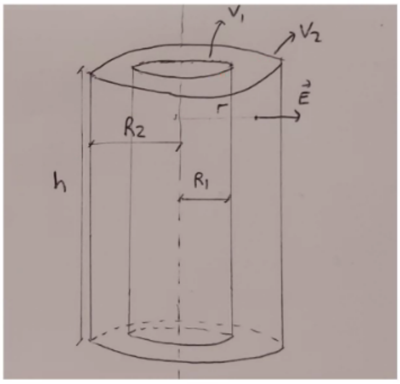
Ejemplo: capacitor cilíndrico

Para un punto entre los dos cilindros, con $R_1 < r < R_2$

por Gauss, $2\pi r\, h\, E(r) = \dfrac{2\pi R_1\, h\, \sigma_1}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \dfrac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} = \dfrac{Q_1}{2\pi h \epsilon_0 r}$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{Q_1}{2\pi h\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q_1}{2\pi h\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$C = \frac{Q_1}{\Delta V} = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$$



Fuente: clase teórica de Pablo Dmitruk

Mirando bien, usó la condición de contorno de conocer Q.

Propuesta: Voy a ver si puedo llegar al mismo resultado asumiendo que no conozco Q, pero conozco V_1 y V_2 en los conductores.

En toda la zona intermedia a los cilindros, $R_1 < r < R_2$ no hay cargas, entonces la ec. de Poisson se convierte en la ec. de Laplace.

La ec. de Laplace en cilíndricas es:

$$\nabla^2 V = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{19}$$

Y mis condiciones de contorno son: $V(R_1) = V_1$, $V(R_2) = V_2$.

Como el ejercicio anterior, como mis condiciones de contorno son en superficies de r constante, puedo asumir que la solución solo depende de r, y si me da bien, por unicidad, esa es la solución. Entonces tiro toda la parte que no depende de r.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0 \tag{20}$$

tiro el 1/r y me queda:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0 \longrightarrow r\frac{dV}{dr} = cte = A \tag{21}$$

Entonces,

$$V(r) = \int \frac{A}{r} dr = Aln|r| + B \tag{22}$$

Como r es positivo siempre, puedo sacar las barras de módulo del logaritmo. Planteo mis dos condiciones de contorno:

$$V(R_1) = V_1 = Aln(R_1) + B \tag{23}$$

$$V(R_2) = V_2 = Aln(R_2) + B \tag{24}$$

Resto $V_1 - V_2$ y me queda ΔV. Despejo A,

$$\Delta V = Aln(R_1) - Aln(R_2) = Aln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \longrightarrow A = \frac{\Delta V}{ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \tag{25}$$

Meto esta expresión de A en la cc. de V_1:

$$V_1 = \frac{\Delta V}{ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} ln(R_1) + B \Longrightarrow B = V_1 - \frac{\Delta V}{ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} ln(R_1) \tag{26}$$

Meto A y B en la solución gral:

$$V(r) = \frac{\Delta V}{ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} ln(r) + V_1 - \frac{\Delta V}{ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} ln(R_1) \tag{27}$$

$$V(r) = V_1 + \frac{\Delta V}{ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} (ln(r) - ln(R_1)) \tag{28}$$

Podría escribir esta solución de manera más elegante, pero escrita de esta manera, el campo $\vec{E}$ se ve claramente como va a quedar,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = -\frac{\Delta V}{ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \frac{1}{r}\hat{r} = \frac{\Delta V}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{r}\hat{r} \tag{29}$$

Ahora tomo una superficie cilíndrica gaussiana con radio genérico pero tal que $R_1 < r < R_2$. Aplico la ley de Gauss para encontrar la carga encerrada.

$$\oint_{S_r} = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \tag{30}$$

La carga encerrada en mi superficie gaussiana es una densidad de carga superficial integrada en una superficie cilíndrica de radio R_1 y altura H de mi cilindro gaussiano.

$$\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \sigma r' d\phi' dz' = \frac{2\pi\sigma R_1 H}{\epsilon_0} \tag{31}$$

Como el campo es solo radial, el flujo a través de las tapas es cero,

$$\oint_{S_r} = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{\Delta V}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{r}\hat{r}\cdot\hat{r} r d\phi dz = 2\pi H \frac{\Delta V}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \tag{32}$$

Igualando ambos miembros de la ley de Gauss,

$$\frac{2\pi H \Delta V}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\sigma R_1 H}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad 2\pi R_1 \sigma = \frac{2\pi\epsilon_0 \Delta V}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \tag{33}$$

Para un cilindro infinito me queda una carga por unidad de longitud $2\pi R_1\sigma$,

$$Q_{long} = 2\pi R_1 \sigma = \frac{2\pi\epsilon_0 \Delta V}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \tag{34}$$

Y la capacidad por unidad de longitud es:

$$C_{long} = \frac{Q_{long}}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \tag{35}$$

Si al cilindro le asigno una altura h como hizo Pablo en la teórica ($h >> R_2 - R_1$), la capacidad por unidad de longitud la multiplico por h y me da una capacidad

$$C = \frac{Q_{long} h}{\Delta V} = \frac{2\pi h \epsilon_0}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \tag{36}$$

Problema 14: Capacitores conectados en serie y paralelo, capacidad equivalente.

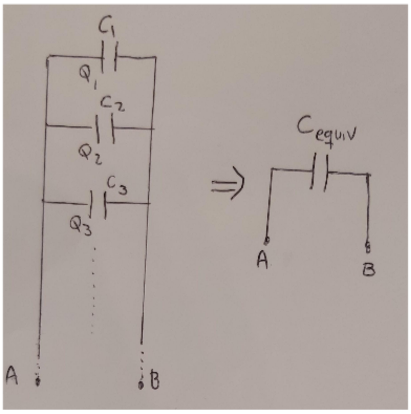
14. En el circuito de la figura:
    - Calcule la capacidad equivalente que se observa desde la batería.
    - Encuentre las cargas de cada condensador y calcule la energía del sistema.
    - Se desconecta la batería, ¿se redistribuyen las cargas?

Como vieron en la teórica, los capacitores conectados en serie o en paralelo, pueden reducirse a un solo capacitor con una capacidad equivalente.

Conexiones entre capacitores

Todo esto lo analizamos al final

En paralelo:



$$Q_1 = C_1(V_A - V_B)$$

$$Q_2 = C_2(V_A - V_B)$$

$$Q_3 = C_3(V_A - V_B)$$

$$\dots$$

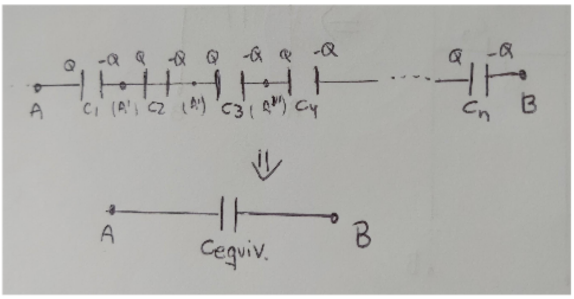
$$Q_{\text{total}} = \textstyle\sum_i Q_i = (V_A - V_B)\sum_i C_i = (V_A - V_B)\, C_{\text{equiv}}$$

$$\boxed{\Rightarrow C_{\text{equiv}\,\|} = \textstyle\sum_i C_i}$$

Usemos esto para resolver y después vemos lo de arriba

Fuente: clase teórica de Pablo Dmitruk

En serie:



$$V_A - V_{A'} = Q/C_1$$

$$V_{A'} - V_{A''} = Q/C_2$$

$$V_{A''} - V_{A'''} = Q/C_3$$

$$\dots$$

$$V_{A^{n-1}} - V_{B'} = Q/C_n$$

Todo esto lo vemos al final

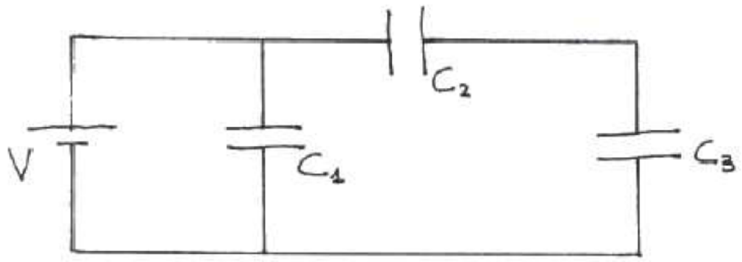
sumando $V_A - V_B = Q\sum_i 1/C_i \;\Rightarrow Q = \dfrac{\Delta V}{\sum_i 1/C_i} = C_{\text{equiv}}\,\Delta V$

$$\boxed{\Rightarrow C_{\text{equiv serie}} = \frac{1}{\sum_i 1/C_i}}$$

Usemos esto para resolver

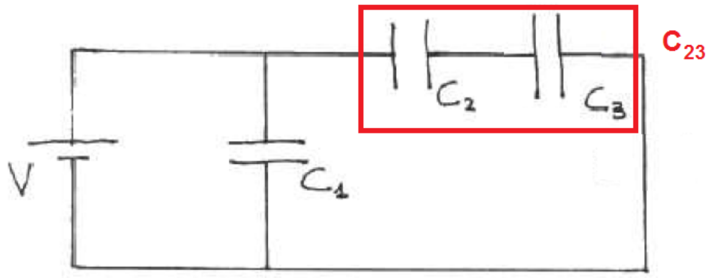
Fuente: clase teórica de Pablo Dmitruk

El ej. 14 nos plantea esta situación:



Problema 14

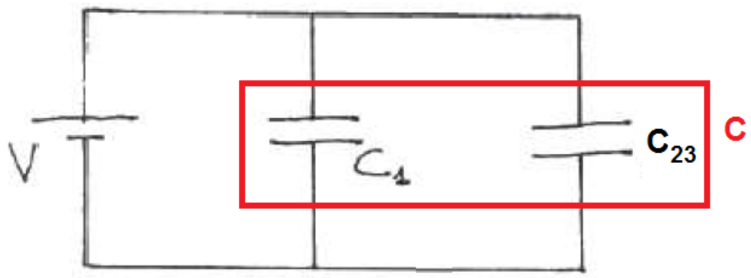
Que por la forma puede resultar un poco engañosa. Es equivalente dibujarlo así:



Ahora voy a calcular una capacidad equivalente C_{23} entre C_2 y C_3. Uso la fórmula para sumarlos en serie,

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \longrightarrow C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \tag{37}$$

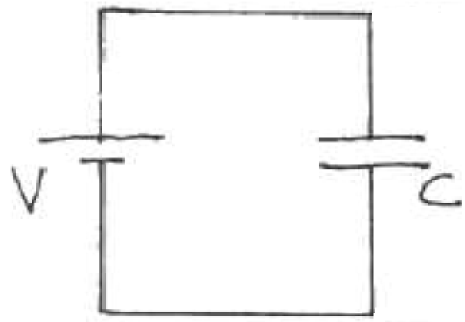
Ahora tengo esto:



Como están en paralelo, la capacidad equivalente es sumarlas directamente,

$$C = C_1 + C_{23} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \tag{38}$$

y el circuito equivalente es:



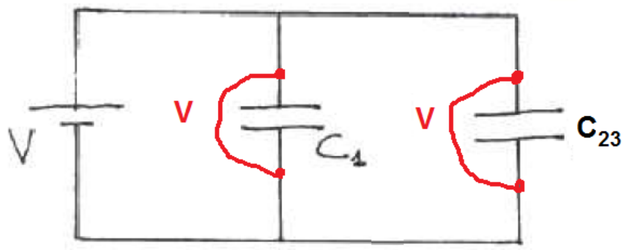
El ejercicio me pide calcular la carga en cada capacitor. Como dije que lo 'azul' de la clase teórica no lo vi, tengo que deducir cómo hacerlo a partir de ya saber lo 'rojo' que era cómo construir C equivalente.

Mirando la figura del circuito equivalente, la carga la calculo así,

$$C = \frac{Q_T}{V} \longrightarrow Q_T = CV \tag{39}$$

donde Q_T es la carga total retenida por los 3 capacitores, y V es una forma 'ingenieril' de escribir ΔV.

Tengamos en cuenta que en este esquema, todo lo dibujado es conductor, o sea que todo lo que se toca está al mismo potencial:



Se ve en el dibujo que ambos capacitores están a diferencia de potencial V. Llamo Q_1 y Q_{23} a las cargas retenidas por cada capacitor. Entonces,

$$V = \frac{Q_T}{C}, \quad V = \frac{Q_1}{C_1}, \quad V = \frac{Q_{23}}{C_{23}} \tag{40}$$

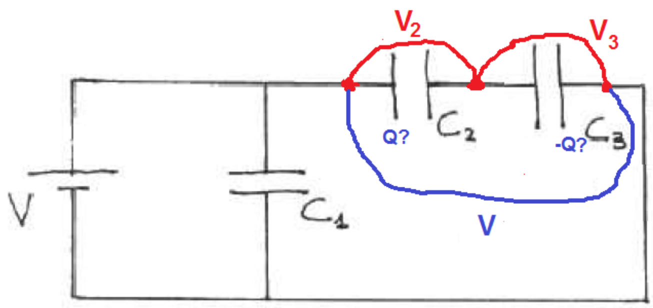
De acá ya obtengo la carga en el capacitor 1 a partir de los datos del problema: $Q_1 = VC_1$. La otra relación ($Q_{23} = VC_{23}$) por ahora no me dice nada porque son magnitudes para un capacitor ficticio equivalente.

Veo que pasa si sumo ambas cargas obtenidas:

$$Q_1 + Q_{23} = VC_1 + VC_{23} = V(C_1 + C_{23}) = \frac{Q_T}{C} C = Q_T \tag{41}$$

O sea que la carga total de capacitores en paralelo es la suma de las cargas de cada uno. Si ahora veo lo 'azul' de la parte de capacitores en paralelo, puedo ver que es efectivamente así.

Me falta calcular las cargas de los capacitores 2 y 3. Hago el siguiente dibujo:



En este dibujo veo claramente que $V = V_2 + V_3$. Donde se cumplen,

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2}, \quad V_3 = \frac{Q_3}{C_3} \tag{42}$$

Ahora bien, esas Q que dibuje en azul las hice porque si miro el dibujo, el capacitor C_{23} cuya carga es Q_{23}, puede ser que tenga las mismas cargas que *cada capacitor por separado* C_2 y C_3. O sea, mi hipótesis es que $Q = Q_{23} = Q_2 = Q_3$.

Tengo una manera de comprobarlo. Uso la expresión que había obtenido antes para el capacitor ficticio 2-3.

$$Q_{23} = VC_{23} = (V_2 + V_3)\frac{C_2C_3}{C_2 + C_3} = \left(\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}\right)\frac{C_2C_3}{C_2 + C_3} = \frac{Q_2C_3 + Q_3C_2}{C_2C_3}\frac{C_2C_3}{C_2 + C_3} \tag{43}$$

$$Q_{23} = \frac{Q_2C_3 + Q_3C_2}{C_2 + C_3} \tag{44}$$

Si aplico mi hipótesis e igualo todas esas cargas a Q,

$$Q = Q\frac{C_2 + C_3}{C_2 + C_3} \longrightarrow 1 = 1 \tag{45}$$

Esto quiere decir que $Q_{23} = Q_2 = Q_3$. **O sea que conectados en serie, los capacitores retienen todos la misma carga.** Puedo volver a la parte 'azul' de la teórica y confirmarlo.

Queda entonces resolver el valor de $Q_2 = Q_3$ y expresarlo en función de los datos del problema:

$$V = V_2 + V_3 = \left(\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}\right) = Q_2\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) \longrightarrow Q_2 = Q_3 = \frac{V}{\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)} \tag{46}$$

Y la energía del sistema es

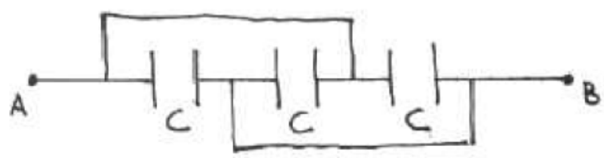
$$U = \frac{1}{2}CV^2 \tag{47}$$

Al desconectar la batería, ¿se redistribuyen las cargas de los capacitores?

Comentario del problema 15

Un truco para resolver este tipo de circuitos es redibujarlos de una manera más 'visual', siempre respetando las uniones de los cables.

Por ejemplo, el a)



sigue siendo el mismo circuito si lo dibujo así: