

Física 3-Cátedra Dmitruk

Guía 2

Clase 2

Facundo Pugliese

Campos que no son lo que parecen

Tenemos ya un par de ejemplos de campos eléctricos “repetidos”, sistemas que a pesar de tener distintas densidades de carga, generan en determinadas regiones el mismo campo. Por ejemplo, para una esfera con densidad de carga

$$\bar{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{kQr}{R^3} \hat{r} & \text{si } r \leq R \\ \frac{kQ}{r^2} \hat{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Esfera maciza

$$\bar{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \frac{kQ}{r^2} \hat{r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

Esfera cargada en superficie

$$\bar{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2} \hat{r}$$

Carga puntual

De hecho, cualquier distribución de carga con simetría esférica de radio R cumple que para $r > R$ genera un campo idéntico al de una carga puntual.

En general, dado un campo eléctrico E en una región V , existen múltiples densidades ρ en la región V' complementaria capaces de generarlo.

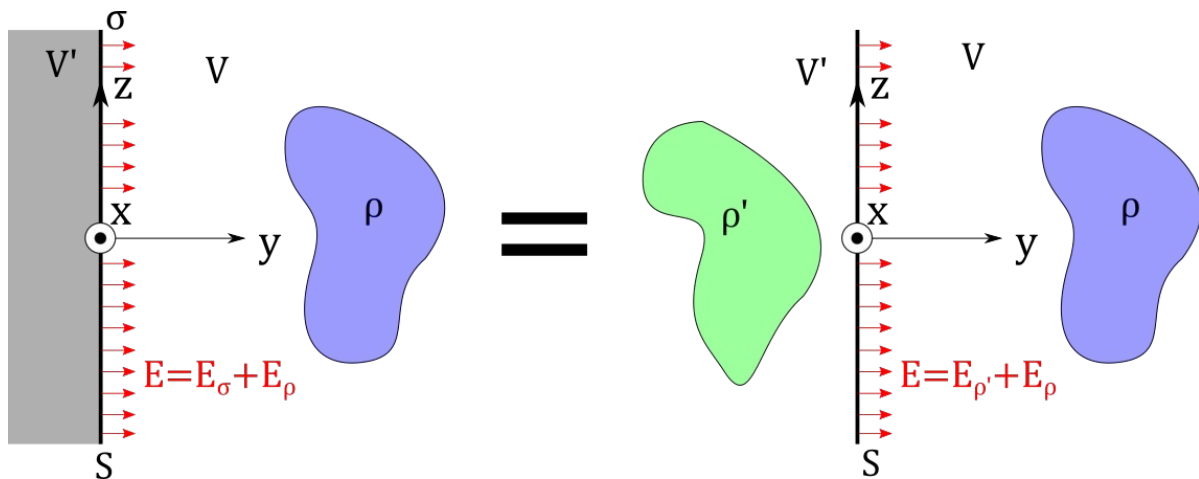
Método de imágenes: Idea general

Si tenemos una densidad ρ en una región V con una superficie conductora S , sabemos que se inducirá un σ sobre ella y la volverá un equipotencial: el campo sobre S será ortogonal a la superficie.

Aprovechando la idea anterior, puedo “inventarme” una densidad ρ' en V' cuyo campo me permita cumplir que un S sea *equipotencial para reemplazar* σ .

Por ejemplo, para un plano conductor infinito frente a una distribución ρ , mi región V sería $y > 0$ y V' sería $y < 0$.

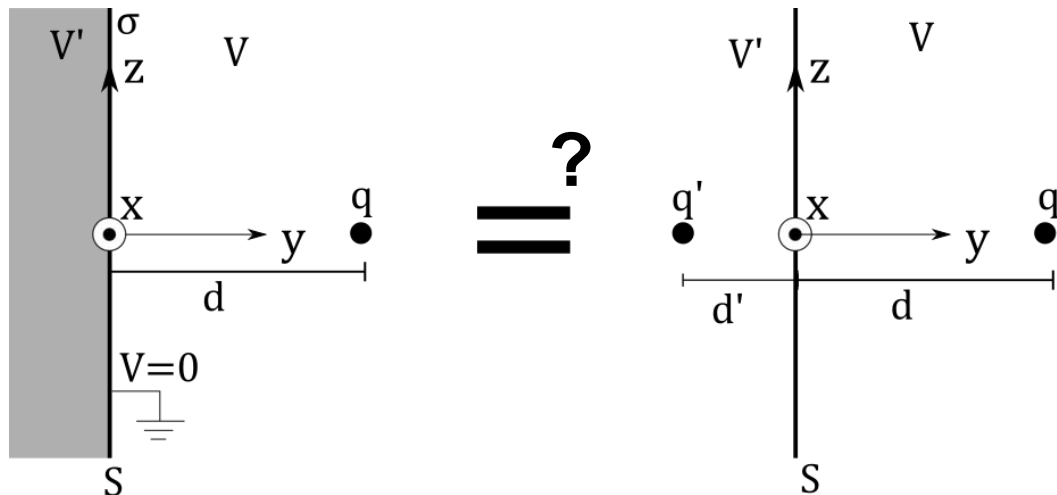
Busco una ρ' que me asegure que $E_x|_S = E_z|_S = 0$.



Empecemos despacio: Ejercicio 6

Comencemos con una carga puntual q a distancia d del plano conductor **a tierra**, pruebo con una carga q' a distancia d' sobre la misma línea para *no romper la simetría* (rotación sobre y).

Busco q' y d' tal que



$$\phi(\vec{r}) = \frac{kq'}{|\vec{r} - (-d')\hat{y}|} + \frac{kq}{|\vec{r} - d\hat{y}|}, \quad \phi(x, 0, z) = 0$$

$$\frac{kq'}{|x\hat{x} + z\hat{z} + d'\hat{y}|} = -\frac{kq}{|x\hat{x} + z\hat{z} - d\hat{y}|} \implies \text{sg}(q') = -\text{sg}(q)$$

Ejercicio 6

Con esto podemos escribir la igualdad como

$$\frac{|q'|}{\sqrt{x^2 + z^2 + d'^2}} = \frac{|q|}{\sqrt{x^2 + z^2 + d^2}}$$

Que tiene una solución trivial $q' = -q$ y $d' = d$.

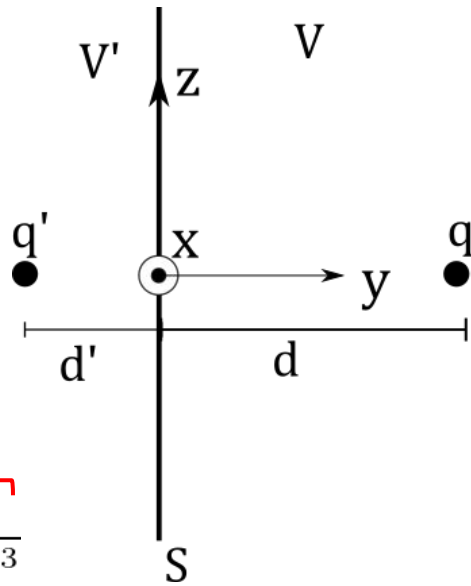
¿Existen otras? Seguramente, **pero con una me basta.**

La (única) solución resulta entonces

$$\phi(\vec{r}) = \frac{kq}{|\vec{r} - d\hat{y}|} - \frac{kq}{|\vec{r} + d\hat{y}|} \quad \vec{E}(\vec{r}) = kq \frac{\overbrace{\vec{r} - d\hat{y}}^{E_q}}{|\vec{r} - d\hat{y}|^3} - kq \frac{\overbrace{\vec{r} + d\hat{y}}^{E_\sigma}}{|\vec{r} + d\hat{y}|^3}$$

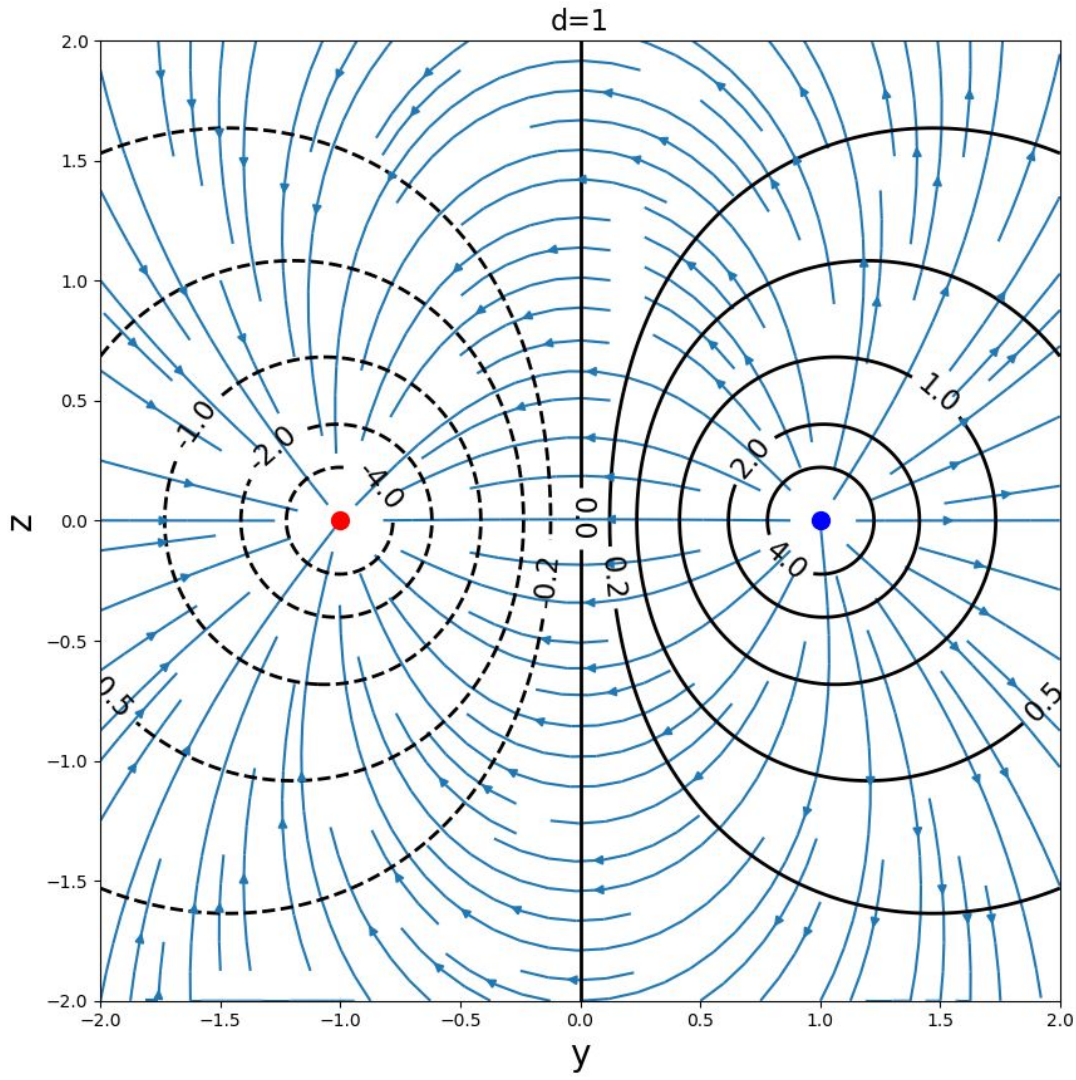
Sobre la superficie $y=0$, el campo efectivamente es ortogonal al plano

$$\vec{E}(x, 0, z) = kq \left[\frac{x\hat{x} + z\hat{z} - d\hat{y}}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{x\hat{x} + z\hat{z} + d\hat{y}}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}} \right] = -\frac{2kqd\hat{y}}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}$$



Equipotenciales
en negro

Líneas de
campo en azul



Ejercicio 6: Distribución de carga

El campo sobre la superficie S ($y=0$) es proporcional a la densidad superficial inducida sobre el conductor. Usando $E|_S = \sigma/\epsilon_0$

$$\sigma(x, z) = \epsilon_0 E_y(x, 0, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{qd}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}$$

Reconocemos el radio en polares $r^2 = x^2 + z^2$ sobre el plano x - z , por lo que σ tiene simetría de rotación alrededor de y : $\sigma(x, z) = \sigma(r)$

Podemos calcular la carga total inducida sobre el plano integrando σ en S :

$$\begin{aligned} Q_S &= \int_S \sigma(r) dS = -\frac{qd}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r}{(r^2 + d^2)^{3/2}} d\theta dr = -qd \int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + d^2)^{3/2}} dr \\ &= -qd \left. \frac{(-1)}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right|_0^\infty = -q \end{aligned}$$

Ejercicio 6: Distribución de carga

$$\sigma(x, z) = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}$$

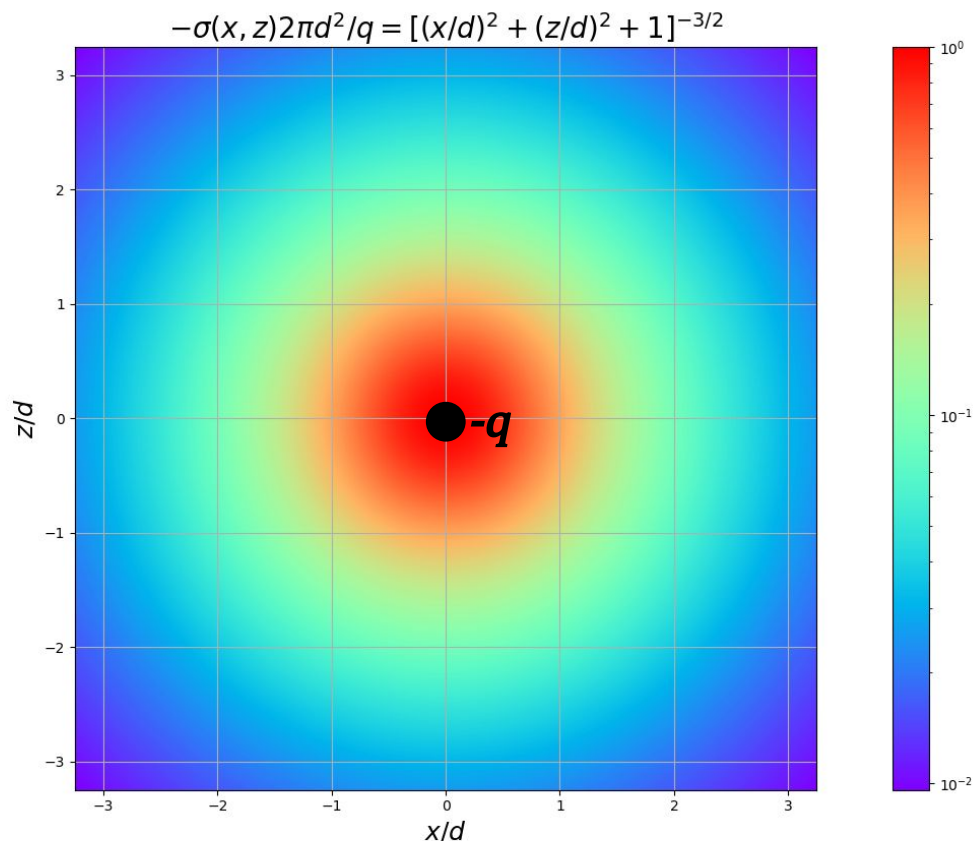
Si me paro frente al plano (en $y > 0$),
veo un campo idéntico al de una
carga $-q$ en $(0, -d, 0)$.

¿Que veo si me paro en un $y < 0$?

¡Un campo idéntico al generado por
una carga $-q$ en $(0, +d, 0)$!

¿Cómo será entonces el campo
eléctrico en $y < 0$?

Nulo, pues veo una carga q y otra $-q$
en $(0, +d, 0)$; una carga total **nula**.



Ejercicio 6: Distribución de carga

$$\sigma(x, z) = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(x^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}$$

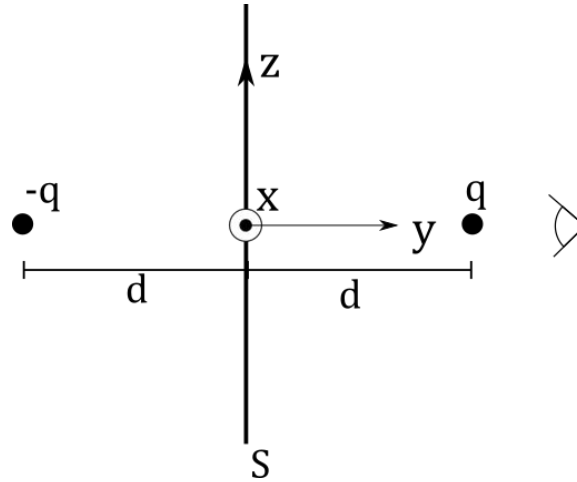
Si me paro frente al plano (en $y > 0$),
veo un campo idéntico al de una
carga $-q$ en $(0, -d, 0)$.

¿Que veo si me paro en un $y < 0$?

¡Un campo idéntico al generado por
una carga $-q$ en $(0, +d, 0)$!

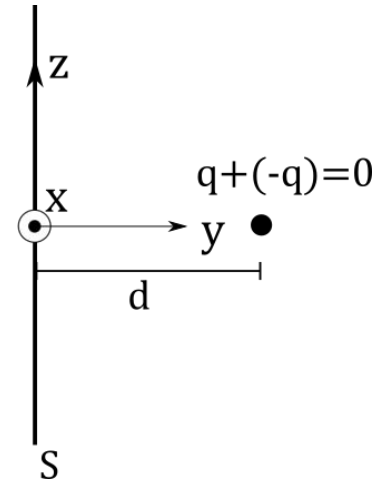
¿Cómo será entonces el campo
eléctrico en $y < 0$?

Nulo, pues veo una carga q y otra $-q$
en $(0, +d, 0)$; una carga total **nula**.



*Si miro desde la
derecha ($y > 0$)*

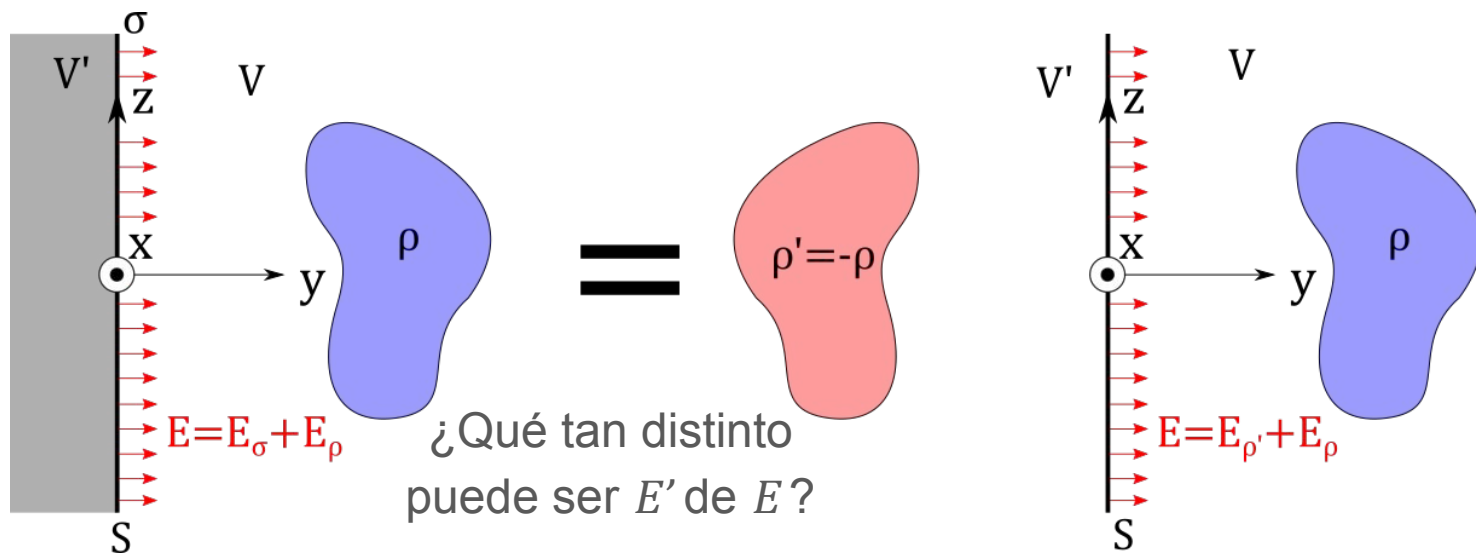
*Si miro desde la
izquierda ($y < 0$)*



E=0

Ejercicio 6: Generalicemos un poco

Generalizando, vemos que para una q en (x', y', z') , el método de imágenes nos arroja una segunda carga $-q$ en $(x', -y', z')$. Por lo tanto, para una $\rho(x', y', z')$ su imagen será una $\rho'(x', y', z') = -\rho(x', -y', z')$. Luego, si conozco el campo E para una distribución $\rho(x', y', z')$, me basta calcular el campo E' de $\rho'(x', y', z') = -\rho(x', -y', z')$.



Ejercicio 6: Energía de la configuración

Calculemos el trabajo necesario para traer la carga desde $y'=\infty$ hasta $y'=d$. Este será el trabajo que el campo E_σ genera sobre la carga q .

$$\bar{E}_\sigma(\bar{r}) = -kq \frac{\bar{r} + y'\hat{y}}{|\bar{r} + y'\hat{y}|^3} \quad \text{Pero } E_\sigma \text{ depende de } y', \text{ así que hay que tener } \mathbf{cuidado}$$

$$\text{Para } q \text{ en } (0, y', 0), \text{ la fuerza es } \bar{F} = q\bar{E}_\sigma(0, y', 0) = -kq^2 \frac{y'\hat{y} + y'\hat{y}}{|y'\hat{y} + y'\hat{y}|^3} = -kq^2 \frac{\text{sg}(y')}{|2y'|^2} \hat{y}$$

y dado que traigo la carga q a lo largo del eje y (es más fácil): $d\bar{l} = dy'\hat{y}$

$$W = - \int_\infty^d \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int_\infty^d \frac{kq^2}{4} \frac{1}{y'^2} \hat{y} \cdot dy'\hat{y} = \frac{kq^2}{4} \frac{(-1)}{y'} \Big|_\infty^d = -\frac{kq^2}{4d} = \frac{1}{2}q \boxed{\frac{k(-q)}{2d}}$$

Es la mitad de la energía electrostática entre 2 cargas q y $-q$ a distancia $2d$

$\phi_{-q}(r=2d)$