Física 3-Cátedra Dmitruk

Guía 2

Clase 5

Facundo Pugliese

Repaso: Divergencias, rotores y dieléctricos

Para todo dieléctrico (LIH, electrete u otro) vale:

$$\bar{D} = \varepsilon_o \bar{E} + \bar{P}$$

Para poder definir unívocamente cada campo, **necesito conocer sus divergencias y rotores.**

Campo	$\nabla\cdot$	$\nabla\times$
E	ρ/ε_o	0
P	$-\rho_P$	?
D	ρ_L	?

Pero dado que E es irrotacional, tengo que $\nabla \times \bar{D} = \nabla \times \bar{P}$

En el fondo, las propiedades del dieléctrico nos dan la ecuación que nos falta

Para un LIH:

$$\nabla \times \bar{E} = \nabla \times \bar{D} = \nabla \times \bar{P} = 0$$

Para un electrete:

$\bar{P}$ es dato y puedo calcular $\nabla \times \bar{P}$

Electretes: Materiales con polarización fija

Como dijimos, un electrete es un material dieléctrico con **polarización P dada, independiente del campo eléctrico externo**.

Esto nos permite calcular la densidad de polarización en volumen y en superficie:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \bar{P} \qquad\qquad \sigma_P = -\Delta \bar{P} \cdot \hat{n}$$

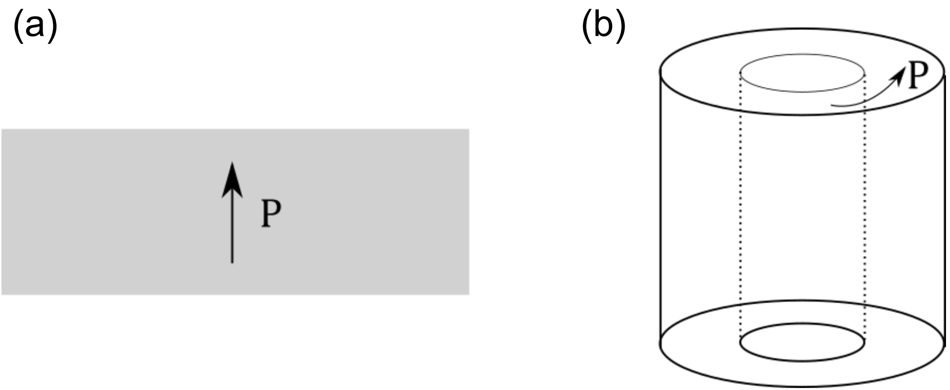
Si no hay otros medios, le sumamos las cargas libres (normalmente dato) y obtenemos las densidades de carga totales para calcular E cómo en la Guía 1.

Si hay otros medios, resolvemos D usando la carga libre y conociendo P podemos obtener el campo eléctrico de $\quad \bar{D} = \varepsilon_o \bar{E} + \bar{P}$

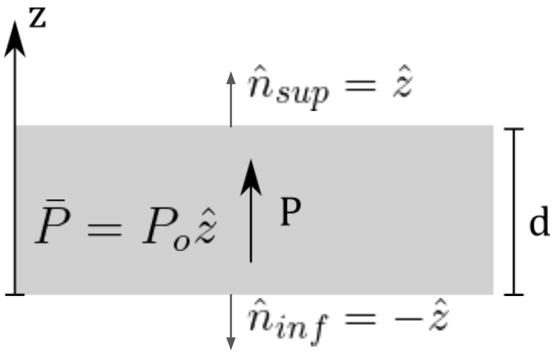
Los dieléctricos los seguimos trabajando cómo antes.

Ejercicio 21: Dos electretes para entrar en calor

21. Para los electretes de las figuras, muestre que $\vec{D}=0$ en el primer caso y $\vec{E}=0$ en el segundo caso. Recuerde que un electrete es un material que presenta polarización en ausencia de fuentes externas, por lo tanto no es un material lineal.



Ejercicio 21(a)



Lo primero que notamos es que no hay carga libre en el sistema (solo tenemos un dieléctrico neutro), por lo que E será generado por cargas de polarización:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \bar{P} \qquad\qquad \sigma_P = -\Delta \bar{P} \cdot \hat{n}$$

Cómo P es constante, no tenemos carga en volumen

$$\rho = \rho_L + \rho_P = 0$$

Para la densidad en superficie, analizo las 2 interfaces z=0 y z=d

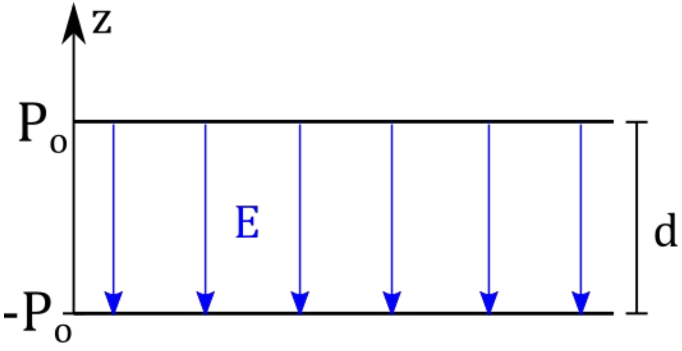
$$z = 0: \qquad \sigma_p^{(inf)} = -\left[\bar{P}_{ext} - \bar{P}_{int}\right] \cdot \hat{n}_{inf} = -\left[0 - P_o\hat{z}\right] \cdot (-\hat{z}) = -P_o$$

$$z = d: \qquad \sigma_p^{(sup)} = -\left[\bar{P}_{ext} - \bar{P}_{int}\right] \cdot \hat{n}_{sup} = -\left[0 - P_o\hat{z}\right] \cdot \hat{z} = P_o$$

Por lo tanto, tenemos 2 planos paralelos con densidad superficial P_o y -P_o

Ejercicio 21(a)

Para el campo eléctrico, el problema se reduce a dos planos paralelos con densidad de carga superficial opuesta, cuyo resultado conocemos



$$\bar{E}(z) = \begin{cases} -\frac{P_o}{\varepsilon_o}\hat{z} & \text{si } 0 < z < d \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Juntando esto con la polarización

$$\bar{P}(z) = \begin{cases} P_o\hat{z} & \text{si } 0 < z < d \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

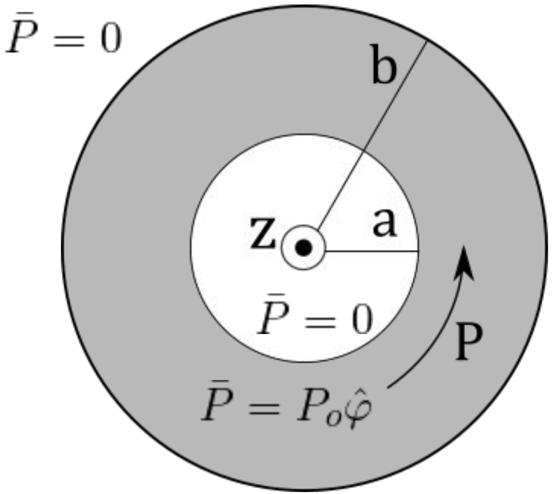
Con esto puedo obtener D usando:

$$\bar{D}(z) = \varepsilon_o\bar{E} + \bar{P}(z) = \begin{cases} \varepsilon_o\left(-\frac{P_o}{\varepsilon_o}\hat{z}\right) + P_o\hat{z} & \text{si } 0 < z < d \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Luego, **D=0 en todo el espacio** ¡No tenemos carga libre en el sistema!

Ejercicio 21(b)

Miremos el sistema desde arriba.



Igual que antes, no tenemos cargas libres, por lo que la carga será totalmente de polarización

$$\rho_P = -\nabla \cdot \bar{P} \qquad\qquad \sigma_P = -\Delta\bar{P}\cdot\hat{n}$$

En cilíndricas: $\nabla \cdot \bar{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rP_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = 0$

Por lo tanto, solo podemos tener carga superficial en las interfaces r=a y r=b

$$r = a: \qquad \sigma_P^{(a)} = -\left[\bar{P}_{ext} - \bar{P}_{int}\right]\cdot\hat{n}_a = P_o\hat{\varphi}\cdot(-\hat{r}) = 0$$

$$r = b: \qquad \sigma_P^{(b)} = -\left[\bar{P}_{ext} - \bar{P}_{int}\right]\cdot\hat{n}_b = P_o\hat{\varphi}\cdot\hat{r} = 0$$

Pero se ve que tampoco...

Ejercicio 21(b): Campo eléctrico del vacío

Por lo tanto, el sistema se reduce a… **nada**. No hay carga en ningún punto del espacio, por lo que el **campo eléctrico es nulo.**

Obtenemos entonces $\bar{D}(\bar{r}) = \bar{P}(\bar{r}) = \begin{cases} P_o\hat{\varphi} & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

Es razonable pensar que E será nulo dado que no hay cargas (o fuentes). Pero si tampoco hay carga libre, ¿cómo puede ser que tengamos D no nulo?

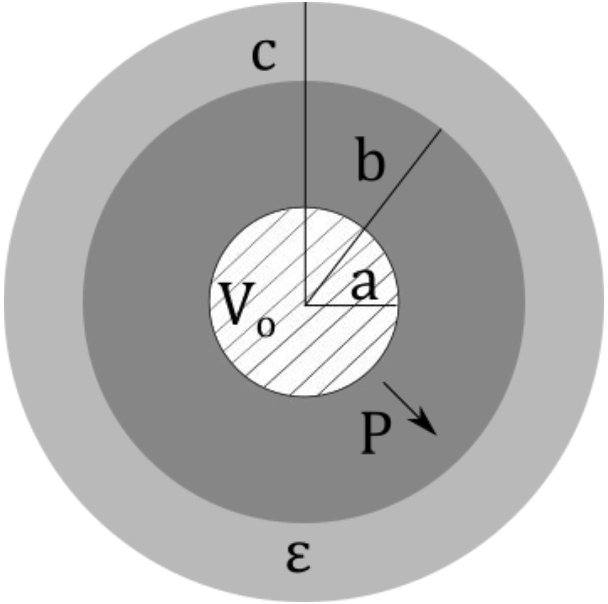
El problema es que **la carga libre no es la única fuente de D**, pues

$$\nabla \times \bar{D} = \nabla \times \bar{P} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial P_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial P_r}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial r}\right)\hat{\varphi} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rP_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial P_r}{\partial \varphi}\right)\hat{z}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial (rP_o)}{\partial r}\hat{z} = \frac{P_o}{r}\hat{z} \implies \boxed{\nabla \times \bar{D} = \frac{P_o}{r}\hat{z} \quad , \quad \nabla \cdot \bar{D} = 0}$$

¡Continuará dentro de un mes!

Mezcladito: Juntando medios



Tenemos una esfera conductora maciza de radio a conectada a una batería con potencial V_0 rodeada por un electrete de polarización radial $\bar{P} = P_o\hat{r}$ de radio interno a y externo b.
Todo este sistema está envuelto en un dieléctrico LIH de permitividad ε, radio interno b y externo c.

a) Calcular E, P y D en todo el espacio
b) Obtener las densidades de carga libre y polarización
c) ¿Cómo es el campo eléctrico en el exterior para $V_0=0$? ¿Y para $Q_{conductor}=0$?