Física 3-Cátedra Dmitruk

Clase 2

Guía 4

Facundo Pugliese

Ampere: Cambiando puntos por cruces

Ley de Ampere: $\nabla \times \bar{B} = \mu_o \bar{j}$

↓ Teorema de Stokes

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_o \int_{S(C)} \bar{j} \cdot d\bar{S} = \mu_o I_{conc}$$

Ley de Gauss: $\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$

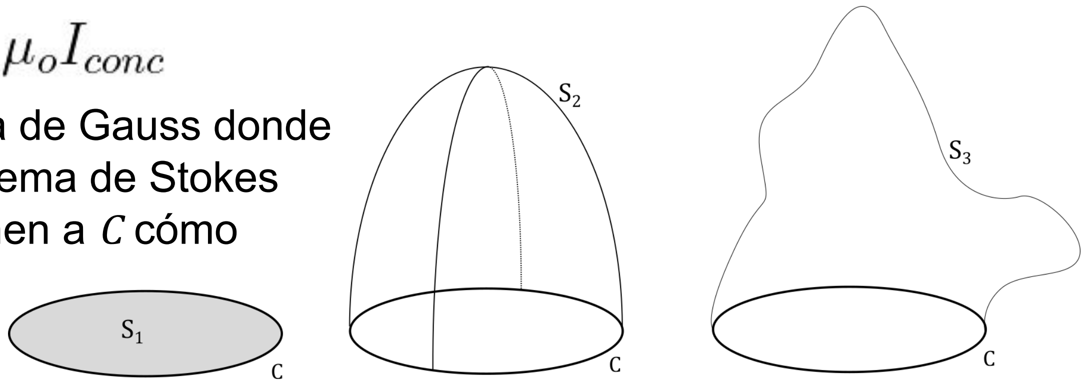
↓ Teorema de Gauss

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{V(S)} \rho dV = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o}$$

Nos gustaría entonces usar la misma estrategia que para el campo eléctrico. Encontrar una curva C sobre la cual B sea constante y paralelo a dl y calcular la corriente concatenada por $S(C)$

$$BL(C) = \mu_o I_{conc}$$

Sin embargo, a diferencia del Teorema de Gauss donde el volumen $V(S)$ es único, para el Teorema de Stokes existen múltiples superficies S que tienen a C cómo borde. ¡Elegimos la más fácil!

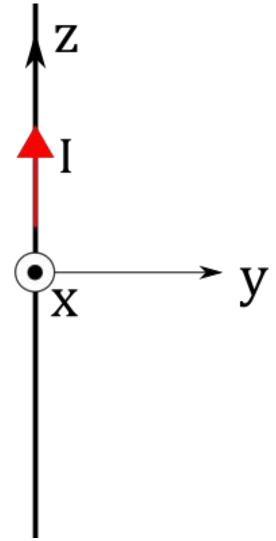


Ampere: Cambiando puntos por cruces

Ley de Ampere: $\nabla \times \bar{B} = \mu_o \bar{j}$

Ley de Gauss: $\nabla \cdot \bar{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_o}$

Pero hay otro problema mucho más grave: ahora **nuestras fuentes no son escalares sino vectores**. Por lo tanto, muchas de las consideraciones de simetría que usábamos antes cambian drásticamente. Esto es **importante para las reflexiones principalmente**.



Ejemplo: Hilo infinito con corriente I
En coordenadas cilíndricas tenemos $\bar{j} = j_z \hat{z}$

$$\bar{B}(r, \theta, z) = B_r(r, \cancel{\theta, z})\hat{r} + B_\theta(r, \cancel{\theta, z})\hat{\theta} + B_z(r, \cancel{\theta, z})\hat{z}$$

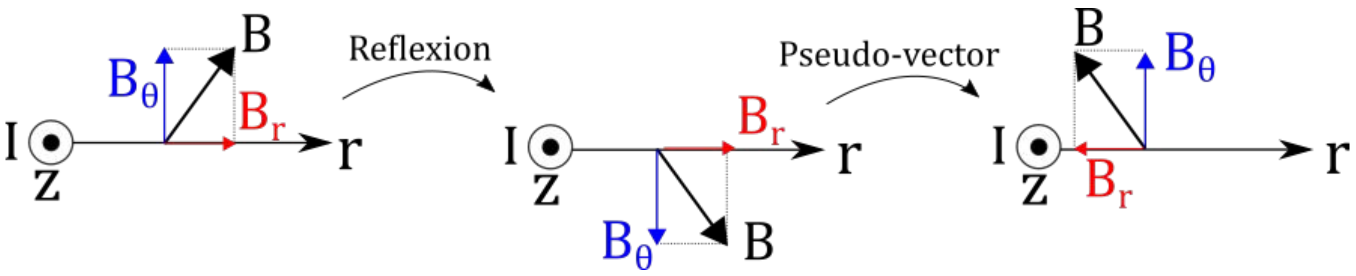
Usemos las simetrías del sistema para eliminar componentes y dependencias. Dado que el sistema no cambia ante traslaciones en z ni rotaciones en θ, solo puede haber dependencia radial.

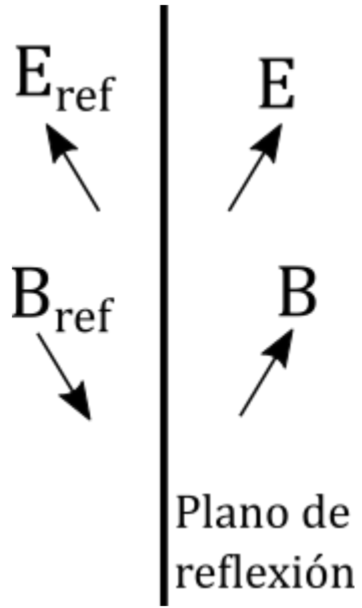
Pero para eliminar componentes, tenemos que usar **reflexiones** y el campo magnético no se porta bien con ellas.

Reflexiones y campo magnético

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_o \bar{j}$$

El campo magnético es un *pseudo-vector*, lo que significa que **cambia de signo en las reflexiones** (además de reflejarse). Esto hace que las simetrías de reflexión no permitan trivialmente eliminar componentes. Veámoslo en el ejemplo para la simetría de reflexión en el plano r-z





En este caso, ¡la componente que resulta en un absurdo es la radial!
Acá es muy importante notar que I efectivamente no cambia durante la reflexión porque su dirección está contenida en el plano r-z.
Esto no va a ocurrir cuando analicemos el plano r-θ

Digresión: Un pseudo-vector conocido $\nabla \times \bar{B} = \mu_o \bar{j}$

En general, uno obtiene *pseudo-vectores* cuando los define cómo **producto vectorial de dos vectores**. Tomemos como ejemplo una partícula moviéndose en una trayectoria circular sobre el plano $z=0$; su momento angular es

$$\bar{L} = m\bar{r} \times \bar{v} = mR\hat{r}_{cil} \times v_o\hat{\theta} = mRv_o\hat{z}$$

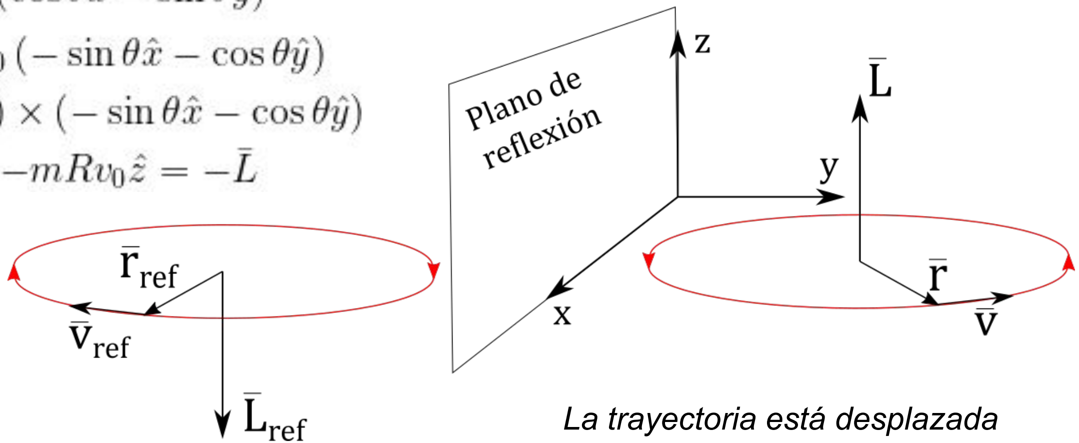
Si ahora aplicamos una reflexión respecto del plano x-z, debemos cambiar el signo de las componentes y de la posición y la velocidad.

$$\bar{r} = R\hat{r}_{cil} = R\left(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}\right) \longrightarrow \bar{r}_{ref} = R\left(\cos\theta\hat{x} - \sin\theta\hat{y}\right)$$

$$\bar{v} = v_0\hat{\theta} = v_0\left(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}\right) \longrightarrow \bar{v}_{ref} = v_0\left(-\sin\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y}\right)$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{ref} &= m\bar{r}_{ref} \times \bar{v}_{ref} = mRv_0\left(\cos\theta\hat{x} - \sin\theta\hat{y}\right) \times \left(-\sin\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y}\right) \\ &= mRv_0(-\cos^2\theta\hat{x} \times \hat{y} + \sin^2\theta\hat{y} \times \hat{x}) = -mRv_0\hat{z} = -\bar{L} \end{aligned}$$

¡Las reflexiones me cambian el sentido de giro! Acá pasamos de anti-horario a horario. Y Biot-Savart nos dice que B se define cómo un producto vectorial de vectores (j y dl).

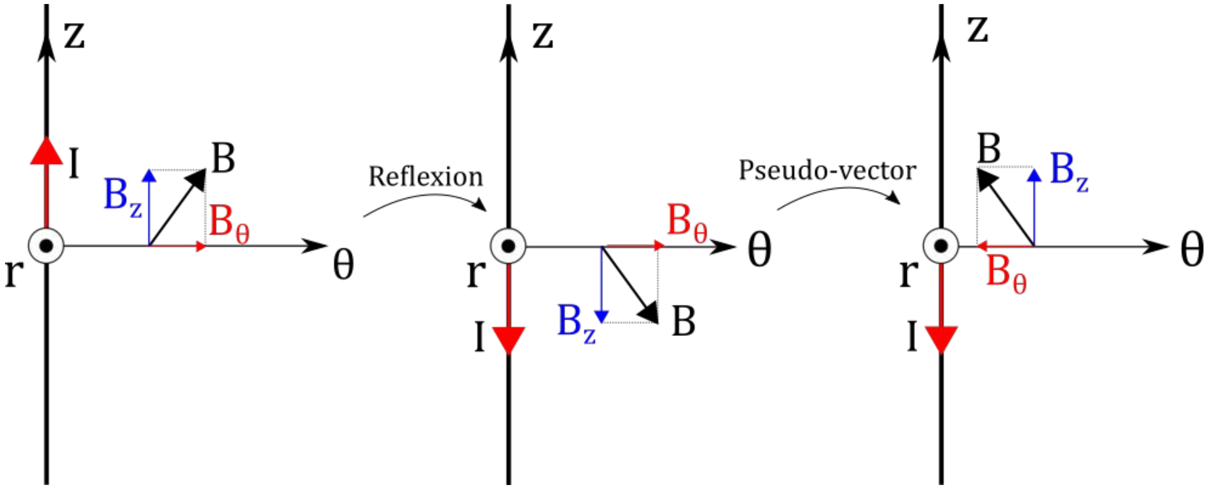


La trayectoria está desplazada del origen para que se vea mejor

Reflexiones y campo magnético

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_o \bar{j}$$

Lo hacemos para el plano r-θ (perpendicular a z).
¡El sistema no presenta esta simetría! La corriente cambia de signo en esta reflexión, tiene una *antisimetría*.
¿Que implica sobre B cambiar el signo de la corriente?

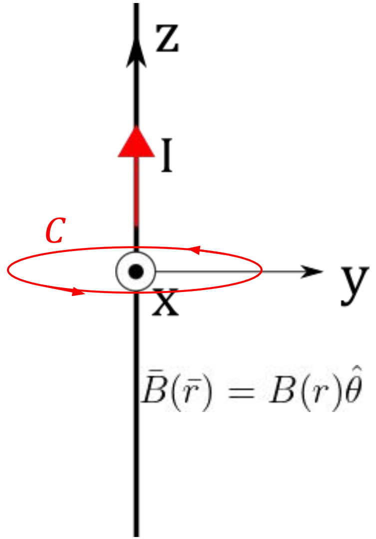


En magnetostática (al igual que en electrostática) un cambio en el signo de las fuentes (las corrientes) implica un cambio en el signo del campo magnético. Por lo tanto, para recuperar el sistema correcto, tenemos que ponerle un "-" a B (volvemos al paso anterior). En esta configuración, la componente que nos introduce un absurdo es B_z, por lo que debe anularse. Por lo tanto, nos queda

$$\bar{B}(\bar{r}) = B(r)\hat{\theta}$$

Volviendo al ejercicio

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_o \bar{j}$$

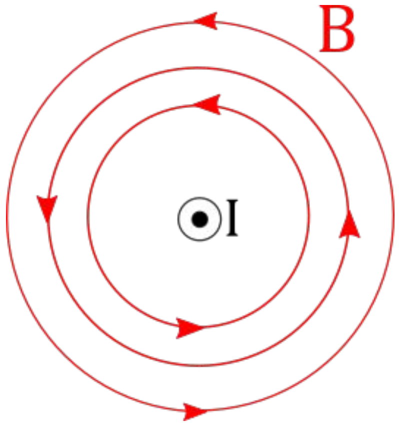


Ya que sabemos que el campo tendrá dirección θ y dependerá de r, por lo que buscamos una curva a radio constante y con dl en dirección θ. Usamos un círculo de radio r arbitrario centrado en el eje z

$$\oint_C \bar{B}(\bar{r}) \cdot d\bar{l} = \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\theta} \cdot r\hat{\theta} d\theta = B(r) \int_0^{2\pi} r d\theta = B(r) 2\pi r$$

y al tener un cable infinitamente delgado, tenemos para todo r: $I_{conc} = I$

Por lo tanto, tenemos $\boxed{\bar{B}(\bar{r}) = \dfrac{\mu I}{2\pi r_{cil}} \hat{\theta}}$



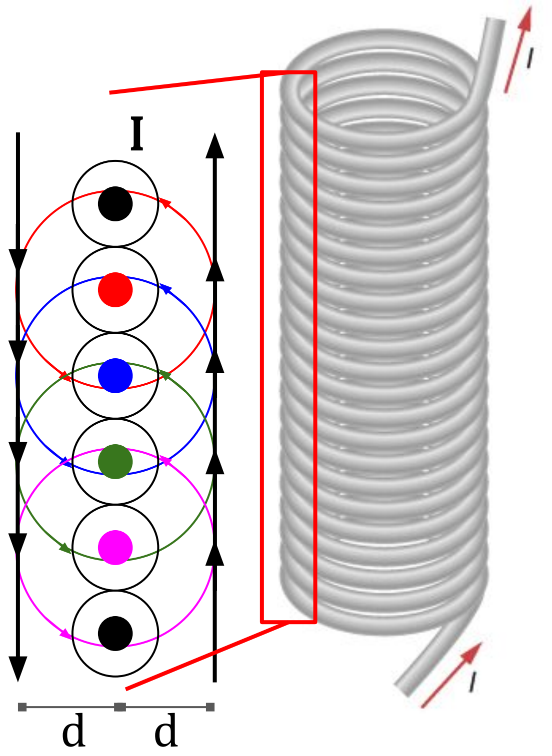
Esto es general, la Ley de Ampere nos dice que **el campo magnético tiende a girar en sentido anti-horario alrededor de la corriente**. Podemos usar esto para evitar todo el análisis de simetrías anterior, descomponiendo el sistema en muchas corrientes lineales y analizando sus contribuciones al campo total para ver qué componentes sobrevivirán.

Solenoide: 2 formas de justificar simetrías

Probemos resolver el campo de un solenoide infinito con $n \gg 1$ vueltas por unidad de longitud, asumiendo que la corriente es azimutal (despreciando la componente vertical).

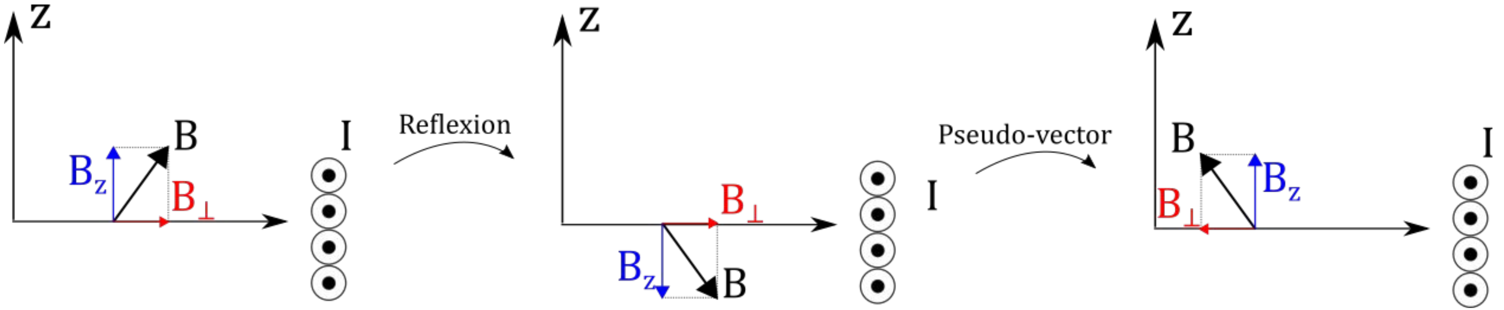
Cómo antes la simetría ante traslaciones en z y rotaciones en θ, me asegura dependencia radial únicamente.
Para las componentes, puedo usar las reflexiones. Pero antes, hagamos un análisis vía aportes diferenciales de corriente.
Para cada elemento de corriente $\mathrm{I_k}$, dibujamos su aporte $\mathbf{B}_\mathrm{k}$ al campo magnético a una distancia d del borde.

Sumando todos, el campo neto $\mathbf{B}$ será la envolvente de los aportes diferenciales (*Huygens flashback*) y tendrá dirección exclusivamente z (hay infinitas corrientes $\mathrm{I_k}$).



Solenoide: 2 formas de justificar simetrías

Usando simetrías, este caso es aún más sencillo que el del hilo, pues la **simetría de reflexión en un plano ortogonal a z** nos basta. Supongamos que B tiene una componente ortogonal a z no nula $B_\perp$

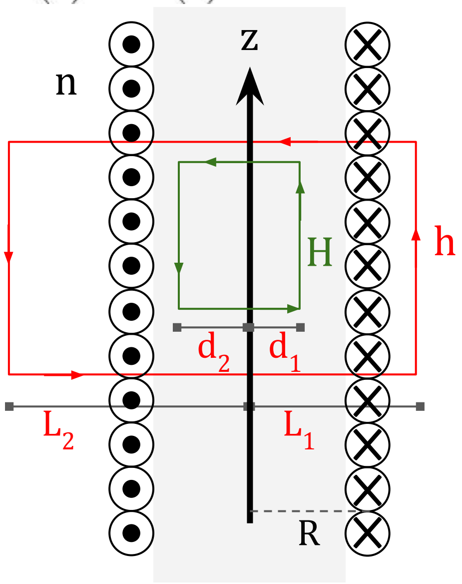


Así llegamos a un absurdo con $B_\perp$, de donde deducimos que debe ser $B_\perp=0$.
De una u otra forma, concluímos que

$$\bar{B}(\bar{r}) = B(r)\hat{z}$$

Solenoide: A resolver

$\bar{B}(\bar{r}) = B(r)\hat{z}$



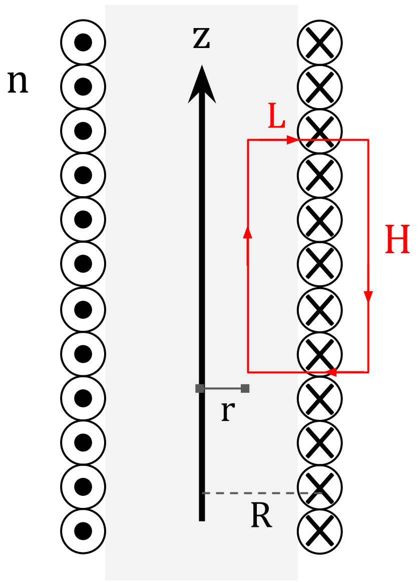
Tomemos cómo curva un cuadrado sobre el eje z, de altura h y base L_1+L_2 pero descentrado: un lado está a distancia $L_1>R$ y el otro a distancia $L_2>R$), tal que ambos estén fuera del solenoide. La corriente concatenada por este cuadrado será nula, pues tenemos la misma cantidad de corriente entrante que saliente.

$$\begin{aligned}\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} &= \cancel{\int_{tapas} \bar{B}\cdot d\bar{l}} + \int_{derecha} \bar{B}\cdot d\bar{l} + \int_{izquierda} \bar{B}\cdot d\bar{l} \\ &= \int_0^h B(r=L_1)\hat{z}\cdot\hat{z}dz + \int_0^h B(r=L_2)\hat{z}\cdot(-\hat{z})dz \\ &= [B(L_1)-B(L_2)]\,h = 0 \Longrightarrow B(L_1)=B(L_2) \quad \forall L_1, L_2 > R\end{aligned}$$

Algo absolutamente análogo podemos hacer para un cuadrado con d_1,d_2<R, dado que la corriente concatenada sigue siendo nula (ahora porque ninguna atraviesa la superficie)

$$B(d_1) = B(d_2) \qquad \forall \quad d_1, d_2 < R$$

Solenoide: A resolver



Sabemos que B(r) es constante para r<R y r>R, pero no necesariamente la misma.

$$\bar{B}(\bar{r}) = \begin{cases} B_0\hat{z} & \text{si } r < R \\ B_1\hat{z} & \text{si } r > R \end{cases}$$

Pero sabemos que B(r→∞) el campo debe anularse, por lo que debe ser $B_1=0$. Con esto a mano, podemos calcular B_0 usando un cuadrado que tenga un lado dentro del solenoide (a distancia r del eje z) y otro fuera (a distancia r+L>R del eje z) y altura H, con sentido de circulación horario (para que su normal tenga el mismo sentido que la corriente). Cómo tenemos n vueltas por unidad de distancia, el cuadrado concatenará nH vueltas del bobinado:

$$I_{conc} = InH$$

Cómo antes, la integral de curva será:

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \int_o^H B(r)\hat{z} \cdot \hat{z}dz + \int_o^H B(r+L)\hat{z} \cdot (-\hat{z})dz$$
$$= B_0 H \Longrightarrow B_0 = \mu_o n I$$

Comparar con el campo en el centro de un solenoide finito

$$\boxed{\bar{B}(\bar{r}) = \begin{cases} \mu_o n I\hat{z} & \text{si } r < R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}}$$

Así que recuerden...