Física 3: Electricidad y Magnetismo

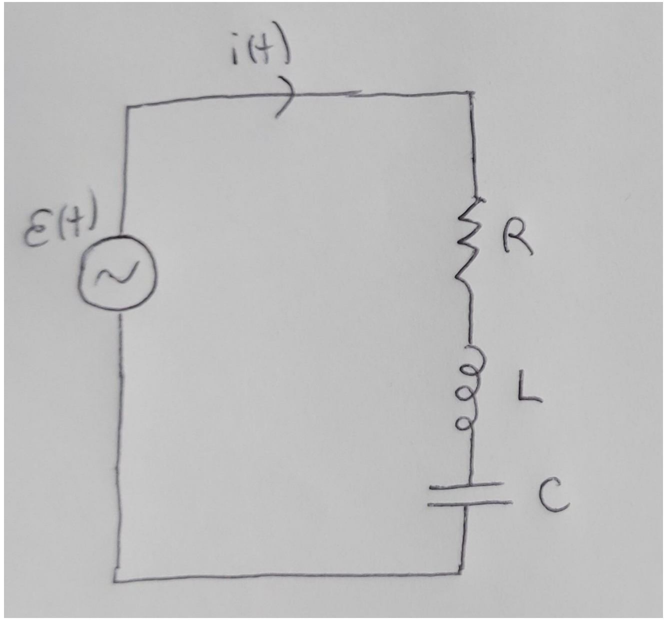
Pablo Dmitruk

Clase 21

Corriente alterna

Consideremos el circuito RLC nuevamente, pero cambiamos la batería por una fuente de voltaje alterno

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \ \cos(\omega t + \varphi_\varepsilon)$$



Tenemos $$\varepsilon(t) = R\, i + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad , \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\varepsilon(t) = R\,\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C}q$$

Nuevamente hacemos $q = q_h + q_p$

Pero ahora no podemos encontrar una $q_p = cte$ como hicimos antes, ya que la f.e.m. en la ecuación diferencial varía en el tiempo → *vamos a proponer una solución particular $q_p(t)$ que varíe en el tiempo sinusoidalmente y con la misma frecuencia ω que la f.e.m. forzante.*

La solución del homogéneo nos va a dar la parte transitoria que es lo que ya vimos antes, y ahora no nos interesa obtener → lo que buscamos es la solución a tiempos mayores, que ya no va a ser constante.

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) \underset{t \gg \tau}{\rightarrow} q_p(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_q)$$

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

Vamos a trabajar con funciones complejas

$$\varepsilon(t) = Re\{\varepsilon_0 \, e^{j(\omega t + \varphi_\varepsilon)}\} = Re\{\varepsilon \, e^{j\omega t}\} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \, e^{j\varphi_\varepsilon} \in \mathbb{C}$$

$$j^2 = -1 \qquad e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$$

$\varepsilon(t)$ = valor instantáneo f.e.m.

$\varepsilon = \varepsilon_0 \, e^{j\varphi_\varepsilon}$ = amplitud compleja de la f.e.m. → número complejo

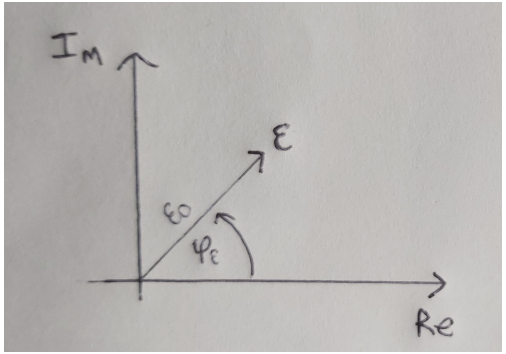
$\varepsilon_0 = |\varepsilon|$ = amplitud real o valor pico de la f.e.m. → número real

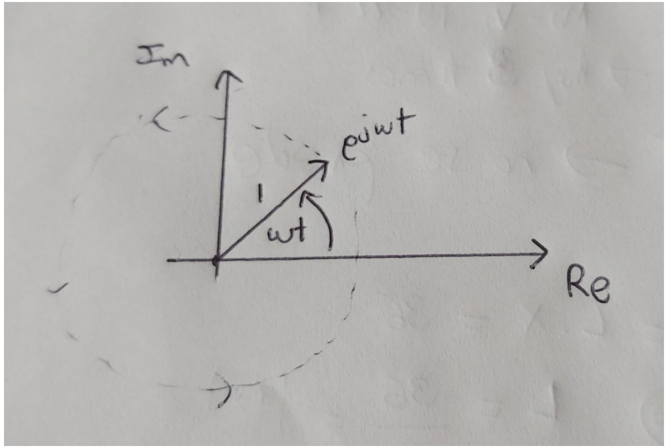
$\varphi_\varepsilon = arg(\varepsilon)$ = fase inicial de la f.e.m.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{j\varphi_\varepsilon} = \varepsilon_0(\cos\varphi_\varepsilon + j\sin\varphi_\varepsilon)$$

Multiplicando por $e^{j\omega t}$ → $\varepsilon \, e^{j\omega t} = \varepsilon_0 \, e^{j\varphi_\varepsilon} \, e^{j\omega t} = \varepsilon_0 \, e^{j(\omega t + \varphi_\varepsilon)}$

obtenemos la *f.e.m. compleja*





El factor complejo $e^{j\omega t}$ se llama *fasor*, es un número complejo que va rotando en el tiempo, con frecuencia ω y amplitud unitaria y le da el carácter temporal a una variable compleja.

$$|e^{j\omega t}| = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

Las funciones de respuesta, es decir, la carga y la corriente las vamos a tratar también como funciones complejas (de la misma frecuencia temporal) y entonces hacemos:

$$q(t) = Re\{q_0 \; e^{j(\omega t + \varphi_q)}\} = Re\{Q \; e^{j\omega t}\} \qquad Q = q_0 \; e^{j\varphi_q} \in \mathbb{C}$$

$$i(t) = Re\{i_0 \; e^{j(\omega t + \varphi_i)}\} = Re\{I \; e^{j\omega t}\} \qquad I = i_0 \; e^{j\varphi_i} \in \mathbb{C}$$

que además están relacionadas ya que $\quad i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad I = j\omega \, Q$

Volvamos a la ecuación diferencial,

$$\varepsilon(t) = R\, i + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad , \quad i = \frac{dq}{dt}$$

que podemos poner también en términos de la corriente, derivando en el tiempo,

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = R\,\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C}$$

Si reemplazamos con las funciones complejas,

$$j\,\omega\,\varepsilon_0\, e^{j\varphi_\varepsilon}\ e^{j\omega t} = R\, j\,\omega\, i_0\, e^{j\varphi_i}\ e^{j\omega t} + L\, j^2\ \omega^2\ i_0\ e^{j\varphi_i}\ e^{j\omega t} + \frac{1}{C}\, i_0\ e^{j\varphi_i}\ e^{j\omega t}$$

$$j\,\omega\,\varepsilon_0\, e^{j\varphi_\varepsilon} = R\, j\,\omega\, i_0\, e^{j\varphi_i}\ + L\, j^2\omega^2\ i_0\ e^{j\varphi_i} + \frac{1}{C}\, i_0\ e^{j\varphi_i}$$

→ eliminamos el tiempo y quedó una ecuación algebraica

$$j\,\omega\,\varepsilon = R\, j\,\omega\, I + L\, j^2\omega^2\ I + \frac{1}{C}\ I$$

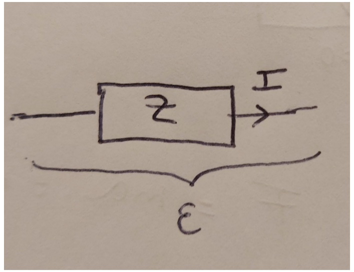
$$\varepsilon = R\, I + j\omega L\, I + \frac{1}{j\omega C}\ I = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) I = Z\, I$$

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

es la impedancia del circuito RLC

La ecuación $\varepsilon = Z\, I$ se puede ver como una

ley de Ohm en amplitudes complejas.



En el circuito RLC se tiene $Z = R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}$ que podemos pensarlo como las impedancias

en *serie* de una resistencia, una inductancia y un capacitor,

$$Z_R = R \;\;,\;\; Z_L = j\omega L \;\;,\;\; Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

En general, $Z = |Z|\, e^{j\varphi_Z} \in \mathbb{C}$

$$Z_R = R = R\, e^{j\,0} \;\;\rightarrow\;\; |Z_R| = R \;,\;\; \varphi_{Z_R} = 0$$

$$Z_L = j\omega L = \omega L\, e^{j\,\pi/2} \;\;\rightarrow\;\; |Z_L| = \omega L \;,\;\; \varphi_{Z_L} = \pi/2$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\, e^{-j\,\pi/2} \;\;\rightarrow\;\; |Z_C| = \frac{1}{\omega C} \;,\;\; \varphi_{Z_C} = -\pi/2$$

En cada impedancia podemos asociar una tensión compleja, según la ley de Ohm $\varepsilon = Z\, I$

$$\varepsilon_R = Z_R\, I \qquad \varepsilon_L = Z_L\, I \qquad \varepsilon_C = Z_C\, I$$

Las impedancias introducen un *desfasaje* entre tensión y corriente:

Para una resistencia: $i_0\, e^{j\varphi_i} = I = \dfrac{\varepsilon}{Z_R} = \dfrac{\varepsilon_0}{R}\, e^{j\varphi_\varepsilon} \quad \rightarrow \quad i_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{R} \;\; , \;\; \varphi_i = \varphi_\varepsilon$ no hay desfasaje

Para una inductancia: $i_0\, e^{j\varphi_i} = I = \dfrac{\varepsilon}{Z_L} = \dfrac{\varepsilon_0\, e^{j\varphi_\varepsilon}}{\omega L\, e^{j\pi/2}} \quad \rightarrow \quad i_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{\omega L} \;\; , \;\; \varphi_i = \varphi_\varepsilon - \dfrac{\pi}{2}$

Para un capacitor: $i_0\, e^{j\varphi_i} = I = \dfrac{\varepsilon}{Z_C} = \varepsilon_0\, e^{j\varphi_\varepsilon}\, \omega C\, e^{j\pi/2} \quad \rightarrow \quad i_0 = \varepsilon_0\, \omega C \;\; , \;\; \varphi_i = \varphi_\varepsilon + \dfrac{\pi}{2}$

La *inductancia y el capacitor desfasan la corriente respecto a la tensión (f.e.m.)* en $\pi/2$

Notar que en general además (salvo para la resistencia) la impedancia depende de la frecuencia $Z = Z(\omega)$

siendo el módulo (y por lo tanto la amplitud real de la corriente resultante) controlado por la frecuencia.

Para una inductancia, $|Z_L| = \omega L$, entonces la impedancia aumenta con la frecuencia → deja pasar menos corriente si aumenta la frecuencia → tiene sentido por Faraday !

Para un capacitor, $|Z_C| = \dfrac{1}{\omega C}$, y la impedancia aumenta cuando la frecuencia es chica → deja pasar

menos corriente al disminuir la frecuencia → capacitor se cargó completamente

En general decimos $Z(\omega) = \underbrace{R(\omega)}_{\text{resistencia}} + j\, \underbrace{X(\omega)}_{\text{reactancia}}$

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)}$$ se llama la admitancia

$$Y(\omega) = \overbrace{G(\omega)}^{\text{conductancia}} + j\, \overbrace{B(\omega)}^{\text{susceptancia}}$$

Los circuitos de corriente alterna se resuelven *aplicando leyes análogas a las de Kirchoff pero para las tensiones y corrientes complejas*, donde los elementos son las impedancias que juegan el rol de las resistencias en los circuitos de corriente continua.

Impedancia serie $$Z_{\sum} = \sum_{k=1}^{N} Z_k$$

Impedancia paralelo $$Z_{\parallel}^{-1} = \sum_{k=1}^{N} Z_k^{-1}$$

y empleamos

$$\sum_k I_k = 0$$ → nodos

$$\sum_j \varepsilon_j = \sum_k I_k \; Z_k$$ → tensiones complejas

una vez que resolvemos el sistema algebraico y obtenemos las corrientes complejas, si queremos las corrientes reales, multiplicamos por $e^{j\omega t}$ y tomamos la parte real.

Valor eficaz de una cantidad periódica

Supongamos una f.e.m. variable en el tiempo como un coseno (también podríamos considerar una corriente variable en el tiempo),

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

Si calculamos el valor medio (temporal) sobre un período de oscilación,

$$< \varepsilon(t) >= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \varepsilon_0 \cos(\omega t)\, dt = \frac{\varepsilon_0 \sin(\omega t)}{\omega}\Big|_0^{2\pi/\omega} = 0$$

Definimos el valor eficaz como:

$$\varepsilon_{ef} =< (\varepsilon(t)- < \varepsilon >)^2 >^{1/2}= \left[\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \varepsilon_0^2 \cos^2(\omega t)\, dt\right]^{1/2} = \left[\frac{\varepsilon_0^2}{2}\right]^{1/2} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}$$

El voltaje en los hogares cuando decimos “220 V” corresponde al valor eficaz, por lo que el pico de tensión es :

$$\varepsilon_0 = \sqrt{2}\, \varepsilon_{ef} = \sqrt{2}\, 220\ V = 311\ V$$

Potencia en circuitos de corriente alterna

La potencia instantánea es $P(t) = i(t)\,\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big]$$

$$P(t) = \varepsilon_0\, i_0 \cos(\omega t)\cos(\omega t - \varphi) = \frac{\varepsilon_0\, i_0}{2}\Big[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\Big]$$

$$< P(t) >= \frac{\varepsilon_0\, i_0}{2}\ \cos\varphi = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\frac{i_0}{\sqrt{2}}\ \cos\varphi = \varepsilon_{ef}\ i_{ef}\ \cos\varphi$$

Si en un tramo de un circuito aplicamos Ohm para la tensión y corriente compleja, tenemos

$$\varepsilon = Z\,I \quad \rightarrow \quad \varepsilon_0 = |Z|\,i_0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{ef} = |Z|\,i_{ef}$$

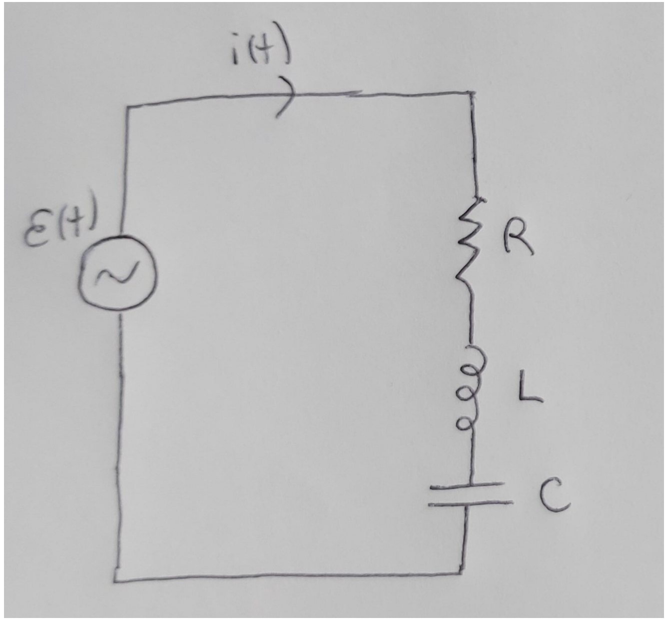
y si $$Z = R + jX = |Z|\,e^{j\varphi} \quad \rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{R}{|Z|}$$

La potencia media disipada en ese tramo se puede escribir entonces como,

$$< P >= \varepsilon_{ef}\,i_{ef}\ \cos\varphi = |Z|\,i_{ef}^2\frac{R}{|Z|} = i_{ef}^2\,R$$

es decir obtenemos una ley análoga a la de Joule pero para la potencia media disipada, y en donde R es la parte real de la impedancia en ese tramo y la corriente es el valor eficaz.

Resonancia en el circuito RLC serie



De la relación entre amplitudes complejas que obtuvimos,

$$\varepsilon = Z\,I \quad \rightarrow \quad \varepsilon_0 = |Z|\,i_0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{ef} = |Z|\,i_{ef}$$

$$Z = R + jX \qquad |Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$i_{ef} = \frac{\varepsilon_{ef}}{|Z|} \quad \rightarrow \quad <P>= i_{ef}^2\,R = \frac{\varepsilon_{ef}^2}{|Z|^2} R = \frac{\varepsilon_{ef}^2\,R}{R^2 + X^2}$$

$$X = X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

vemos que la potencia disipada será máxima si la reactancia X es mínima

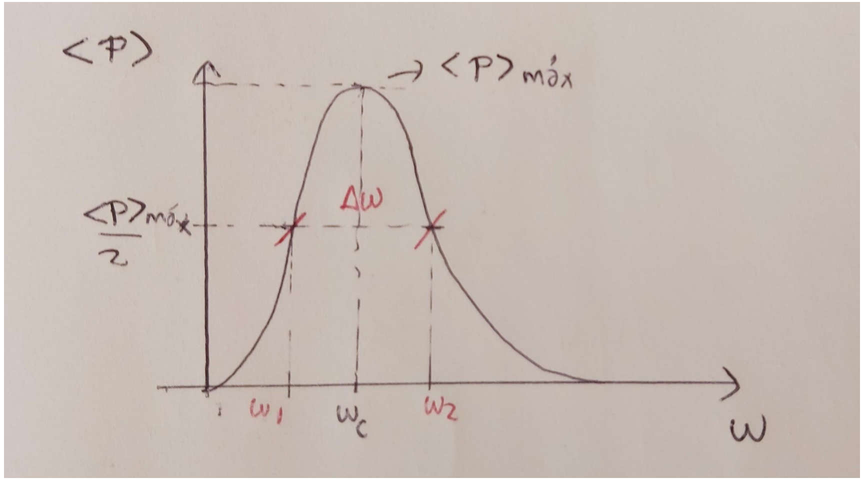
→ el máximo de potencia disipada se obtiene si X=0, es decir si $\omega L = \dfrac{1}{\omega C} \quad \rightarrow \quad \omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_c$

Notar que en ese caso la corriente y la f.e.m. están en fase

A la frecuencia $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_c$ la llamamos la frecuencia de resonancia, y es la frecuencia (de la f.e.m.) que nos da la máxima potencia disipada.

$\alpha = \frac{R}{2L}$

$$< P > (\omega) = \frac{\varepsilon_{ef}^2\, R}{R^2 + X^2} = \frac{\varepsilon_{ef}^2\, R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{\varepsilon_{ef}^2}{R} \frac{(R/L)^2\, \omega^2}{(R/L)^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_c^2)^2} = \frac{\varepsilon_{ef}^2}{R} \frac{(2\alpha\omega)^2}{(2\alpha\omega)^2 + (\omega^2 - \omega_c^2)^2}$$



$$< P >_{max} = < P > (\omega = \omega_c) = \frac{\varepsilon_{ef}^2}{R}$$

De la condición $< P > (\omega) = < P >_{max} /2$

obtenemos los valores de ω_1 , ω_2

$$\rightarrow \frac{(2\alpha\omega)^2}{(2\alpha\omega)^2 + (\omega^2 - \omega_c^2)^2} = \frac{1}{2}$$

ancho de banda

→ salen 4 raíces, descartamos las dos negativas y nos quedan $\omega_{1,2} = \pm\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_c^2}$ $\rightarrow$ $\Delta\omega = 2\alpha = \frac{R}{L}$

Se define el factor de calidad, $Q = \dfrac{\omega_c}{\Delta\omega}$ $\rightarrow$ $Q = \dfrac{\omega_c L}{R} = \dfrac{R_c}{2R}$ con $R_c = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Si $Q \gg 1$ se transmite potencia en una banda estrecha de frecuencias → sirve como sintonizador

Lo usual es ajustar la frecuencia de resonancia con un capacitor C variable

Un ejemplo numérico $R = 60\,\Omega$, $L = 0.1\,H$, $C = 8\,\mu F$ $\rightarrow$ $\omega_c = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \approx 1100\,Hz$

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} = 600\,Hz\ ,\ Q = \frac{\omega_c}{\Delta\omega} \approx 2$$

Si alimentamos este circuito enchufándolo a una toma de $\varepsilon_{ef} = 220\,V$ y $\omega = 2\pi\,50\,Hz = 314\,Hz$

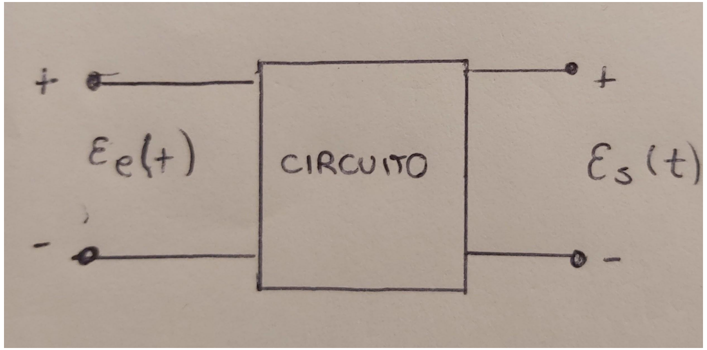
$$\rightarrow\ \omega L = 31\,\Omega\ ,\ \frac{1}{\omega C} = 398\,\Omega\ \rightarrow\ |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = 371\,\Omega \qquad i_{ef} = \frac{\varepsilon_{ef}}{|Z|} \approx 0.6\,A\ \rightarrow\ < P >_{max} = i_{ef}^2\,R = 22\,W$$

Para aumentar la potencia (sin variar la frecuencia) buscamos $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$

que podemos lograrlo cambiando L o C

$$\frac{1}{\omega C} = 31\,\Omega\ \rightarrow\ C = 100\,\mu F\ \rightarrow\ |Z| = 60\,\Omega\ ,\ i_{ef} = 3.7\,A\ \rightarrow\ < P >_{max} = 800\,W$$

Filtros



$$\varepsilon_e(t) = Re\{\varepsilon_e \; e^{j\omega t}\}$$

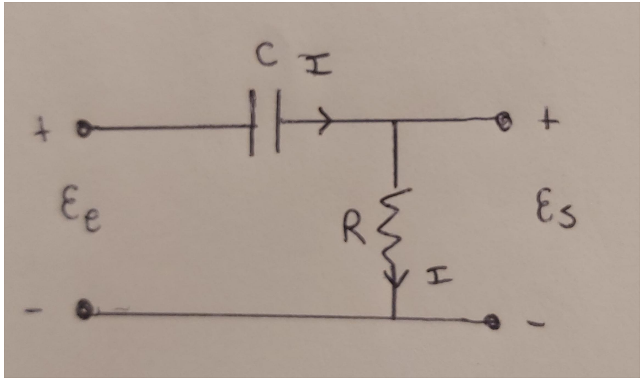
$$\varepsilon_s(t) = Re\{\varepsilon_s \; e^{j\omega t}\}$$

La función de transferencia se define como:

$$T(\omega) = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_e} = |T| \; e^{j\varphi}$$

$$|T| = \frac{|\varepsilon_s|}{|\varepsilon_e|} \quad , \quad \varphi = arg(T) = arg(\varepsilon_s) - arg(\varepsilon_e)$$

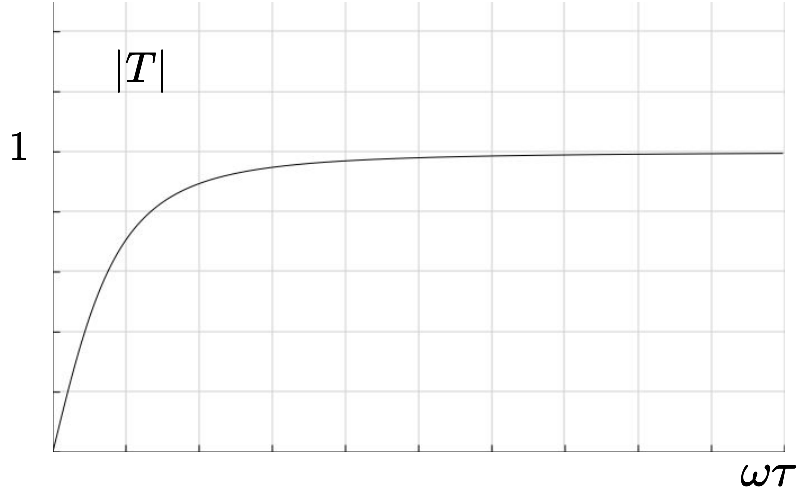
Filtro pasa-altos



$$\varepsilon_s = R\,I = R\,\frac{\varepsilon_e}{Z} = \frac{R\,\varepsilon_e}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}\,\varepsilon_e$$

$$T = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_e} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad , \quad \tau = RC$$

$$|T| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - arctan(\omega\tau)$$

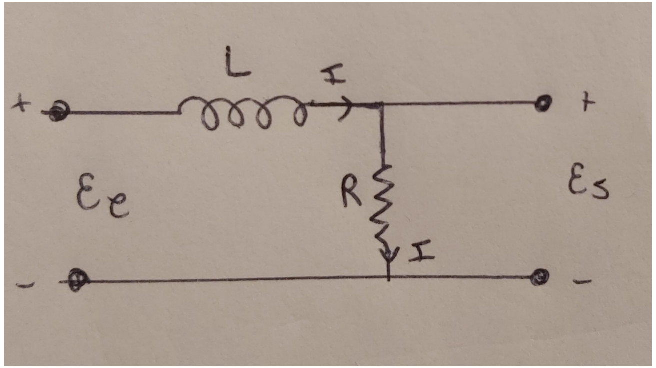


$$\omega \to 0 \quad , \quad |T| \to 0 \ , \ \varphi \to \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \to \infty \quad , \quad |T| \to 1 \ , \ \varphi \to 0$$

Es decir, pasan las frecuencias altas

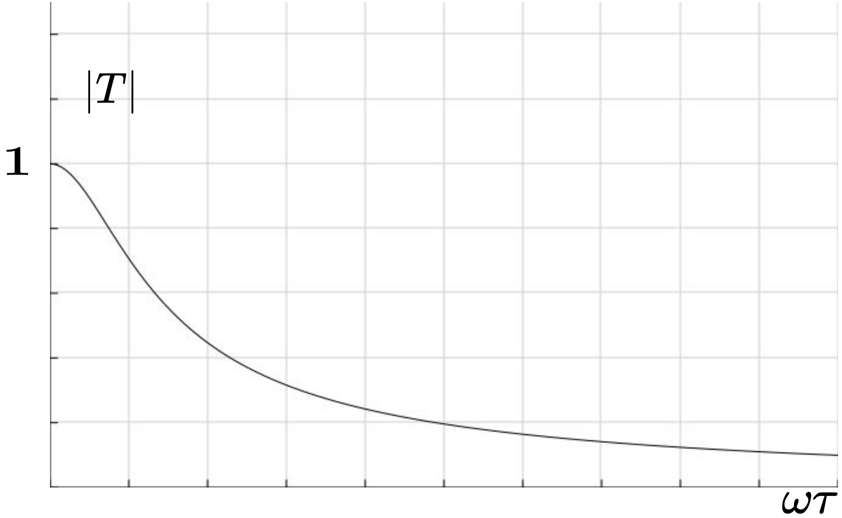
Filtro pasa-bajos



$$\varepsilon_s = R\,I = R\,\frac{\varepsilon_e}{Z} = \frac{R\,\varepsilon_e}{R + j\omega L}$$

$$T = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_e} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad , \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$|T| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad , \quad \varphi = -arctan(\omega\tau)$$



$$\omega \to 0 \quad , \quad |T| \to 1 \ , \ \varphi \to 0$$

$$\omega \to \infty \quad , \quad |T| \to 0 \ , \ \varphi \to -\frac{\pi}{2}$$

Es decir, pasan las frecuencias bajas

Tiene sentido ya que por Faraday la f.e.m. inducida (que se opone a la f.e.m. de entrada) será mayor si las frecuencias son altas y la corriente varía más rápidamente.