Física 3-Cátedra Dmitruk

Clase 1

Guía 5

Facundo Pugliese

Ley de Faraday: Mezclando campos

Integral: $$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

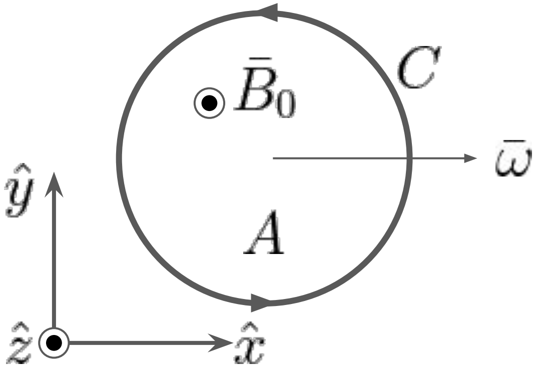
Diferencial:

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \bar{B} \cdot d\bar{S} \xrightarrow[C \text{ fija en el tiempo}]{\text{Teorema de Stokes}} \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

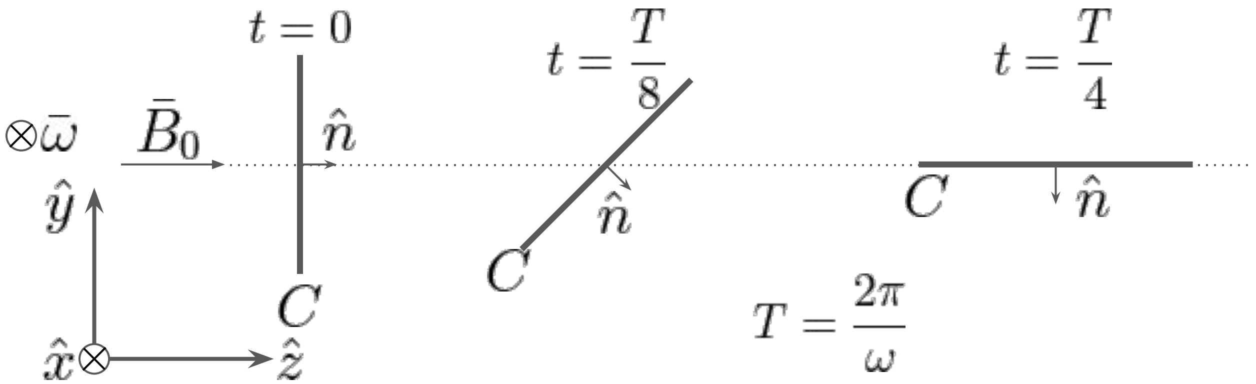
Recordar que la fuerza electromotriz va en contra del potencial (compensa el trabajo de la fuerza eléctrica).
Vale para toda curva C, sea matemática o física, fija o dependiente del tiempo.
Vamos a ver que puede haber una fem $\boldsymbol{\varepsilon}$ aún para $\boldsymbol{B}$ constante.
De hecho, para que $\boldsymbol{E}$ sea conservativo, $\boldsymbol{B}$ debe ser constante.
La Ley de Faraday está íntimamente relacionada con la Fuerza de Lorentz

$$\bar{F} = q\left(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}\right)$$

Ejercicio 1: Espira rotante

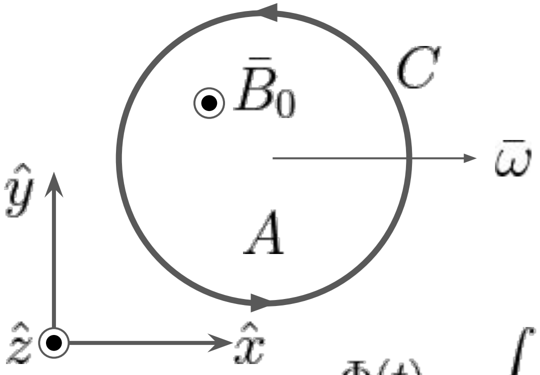


Espira circular girando con velocidad angular ω en torno de uno de sus ejes, perpendicular a un campo magnético uniforme. Queremos la fem inducida sobre ella. Suponemos que a t=0 está ortogonal al campo y tomamos un sentido de circulación antihorario (con normal paralela a **B**). ¿Cómo es el flujo en función de t?



$$\boxed{\hat{n} = \cos(\omega t)\hat{z} - \sin(\omega t)\hat{y}}$$

Ejercicio 1: Espira rotante



$$\hat{n} = \cos(\omega t)\hat{z} - \sin(\omega t)\hat{y} \qquad \bar{B}_0 = B_0\hat{z}$$

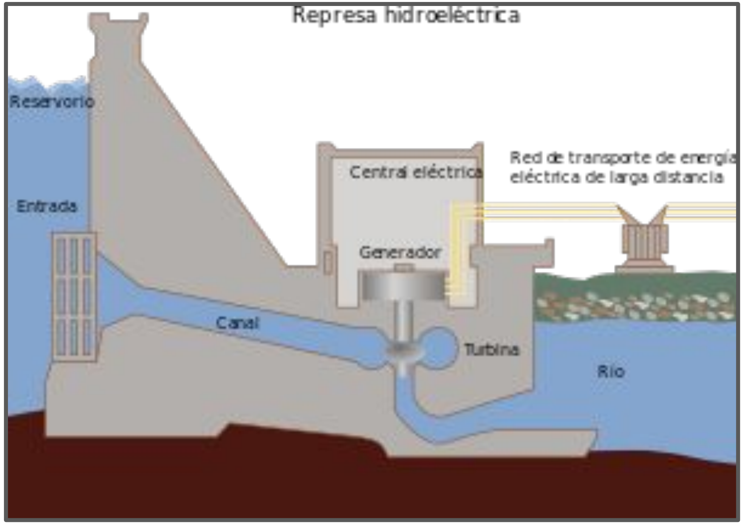
Cómo el campo es constante sobre la superficie, no es necesario parametrizar S, nos basta conocer su normal. Calculamos entonces el flujo:

$$\Phi(t) = \int_{S(C)} \bar{B} \cdot d\bar{S} = \int_{S(C)} B_0\hat{z} \cdot \hat{n} dS = B_0 \cos(\omega t) \int_S dS = B_0 A \cos(\omega t)$$

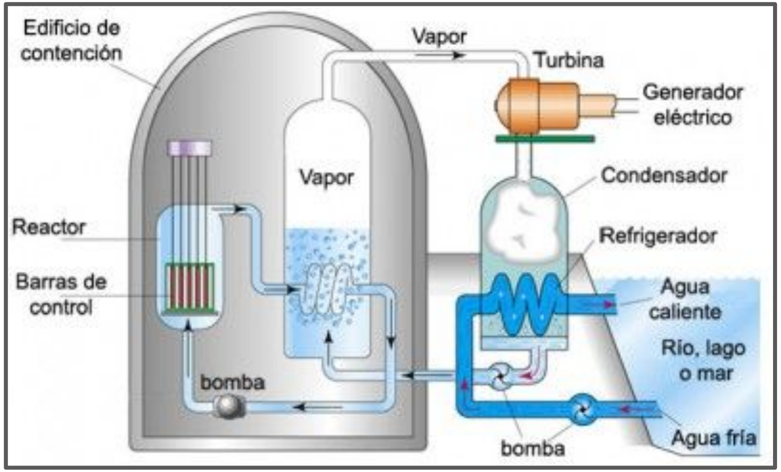
Usando Faraday-Lenz, obtenemos la fem: $\varepsilon(t) = -\dfrac{d\Phi}{dt} = \omega A B_0 \sin(\omega t)$

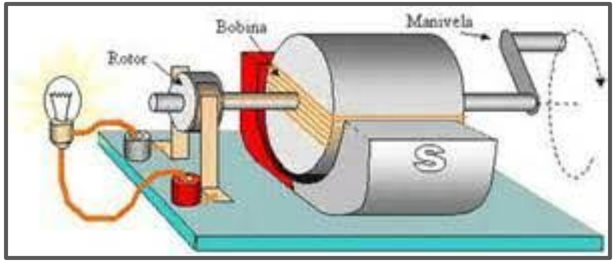
Más adelante veremos que esto corresponde a corriente alterna y este es el principio de funcionamiento de un **dínamo**, un dispositivo que transforma energía cinética en energía eléctrica (centrales hidroeléctricas, bicicletas, baterias de auto, incluso las centrales nucleares usan dinamos para generar electricidad).

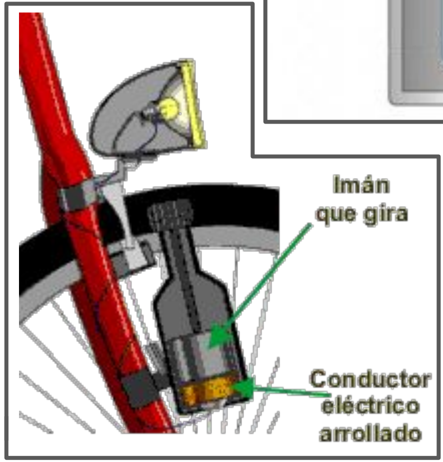
Bocha de dinamos



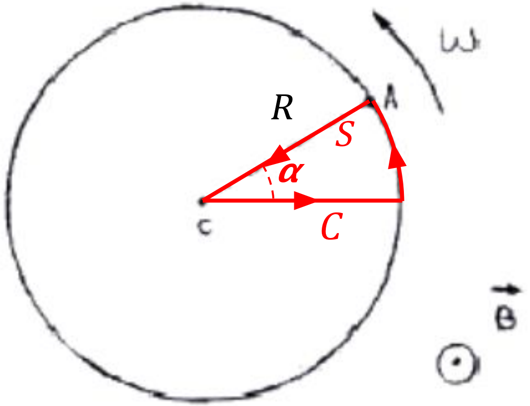
Central termonuclear







Ejercicio 2: Disco de Faraday



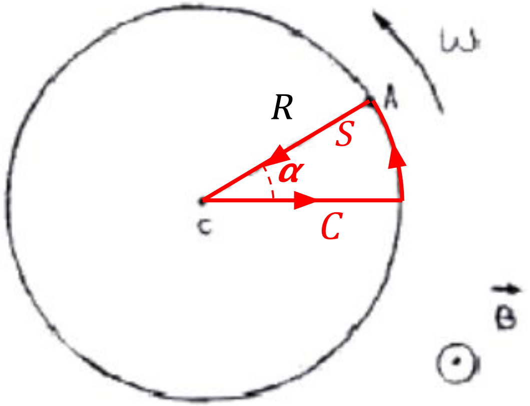
Otro posible formato de dínamo, tenemos un disco conductor de radio R perpendicular a un campo magnético B constante que gira con velocidad angular ω respecto de su eje. Queremos la fem entre A y C. Prueben hacerlo por Faraday, teniendo en cuenta:

- ¿Cambia el flujo magnético a través del disco?
- ¿Que curva C me conviene tomar en este caso?
- **Pista:** Escribir $\mathbf{r}_A(t)$ y $\mathbf{r}_C(t)$

Tomo como curva C una porción del disco. Cómo C está fija y A se mueve con velocidad angular ω constante, el área la superficie S encerrada por la curva crecerá linealmente en el tiempo $A(t) = \frac{R^2}{2}\alpha(t) = \frac{R^2}{2}\omega t$

Y su normal será siempre paralela al campo $\hat{n} = \hat{z}$

Ejercicio 2: Disco de Faraday



$$A(t) = \frac{R^2}{2}\alpha(t) = \frac{R^2}{2}\omega t \qquad \hat{n} = \hat{z} \qquad \bar{B} = \bar{B}_0\hat{z}$$

Con esto podemos calcular el flujo magnético:

$$\Phi(t) = \int_{S(t)} \bar{B} \cdot d\bar{S} = \int_{S(t)} B_0\hat{z} \cdot \hat{z} dS = B_0 \int_{S(t)} dS = B_0 A(t)$$

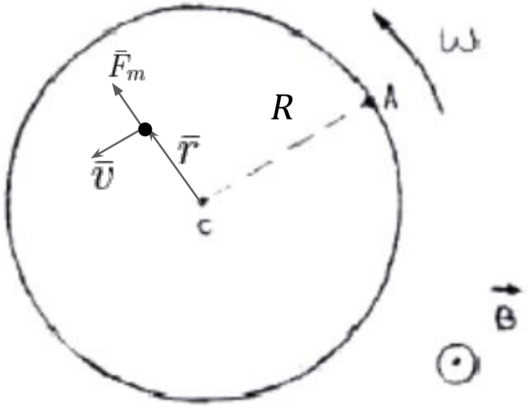
$$\Phi(t) = B_0 \frac{R^2}{2}\omega t$$

Usando Faraday-Lenz: $\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0\frac{R^2}{2}\omega$ Corriente continua (ε constante)

Podemos ver que en este caso, **la curva C está definida en términos de la trayectoria que describe el punto A** y no por una curva material (cómo la espira del ejercicio 1). Así de pulenta es Faraday-Lenz.

¿Pero qué significado físico tiene esta curva/trayectoria?

Ejercicio 2: Disco de Faraday visto por Lorentz



Sabemos que el disco es un conductor y el sistema está en un estacionario (tiene velocidad constante) así que **esperamos que las cargas estén en equilibrio, por lo que la fuerza debe anularse en todo punto del disco.**

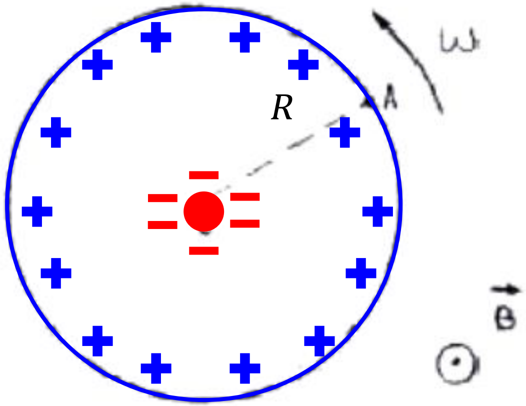
$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) = 0 \Longrightarrow \bar{E} = -\bar{v} \times \bar{B}$$

Pero cómo las cargas están fijas sobre el conductor, a distancia r del centro las cargas tendrán velocidad $\bar{v}(r) = \omega r \hat{\varphi}$ *Rotación de un cuerpo rígido*

Y el campo eléctrico resulta: $\bar{E}(r) = \bar{B} \times \bar{v}(r) = B_0 \hat{z} \times \omega r \hat{\varphi} = -B_0 \omega r \hat{r}$

Para obtener la diferencia de potencial entre A y C hago la integral de curva $V_{AC} = -\int_A^C \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_R^0 B_0 \omega r \hat{r} \cdot \hat{r} d\bar{l} = -B_0 \omega \frac{R^2}{2}$

Relación entre Faraday y Lorentz: BFF



$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) = 0 \Longrightarrow \bar{E} = -\bar{v} \times \bar{B}$$

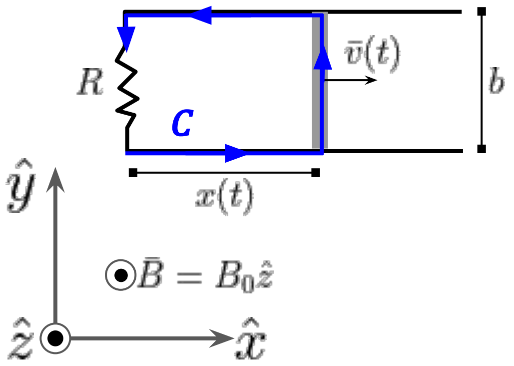
$$\bar{E}(r) = \bar{B} \times \bar{v}(r) = B_0\hat{z} \times \omega r\hat{\varphi} = -B_0\omega r\hat{r}$$

Físicamente, **la fuerza magnética** mueve las cargas positivas hacia el borde del disco y las negativas al centro, lo cual **introduce un desbalance de carga que genera una diferencia de potencial ε.**

En el fondo, la Ley de Faraday-Lenz está muy relacionada con la respuesta que las cargas tienen frente a la fuerza de Lorentz.

Desafío: Prueben re-hacer el Ejercicio 1 usando la fuerza de Lorentz. Buscamos que la fuerza a lo largo de la espira sea nula y calculamos ε cómo el “trabajo” del campo eléctrico al dar una vuelta a toda la espira.

Comentario fugaz: Ejercicio 4



Acá tenemos un caso donde no conocemos *a priori* cómo varía la espira. Pero, ¿cuál es la espira?

A medida que la barra avanza, el área de la espira aumenta y, con esto, el flujo magnético. Esto induce una diferencia de potencial ε sobre C y se establece una corriente $I = \boldsymbol{\varepsilon}/R$ que dependerá de $x(t)$ y $v(t)$.

Pero tengo una corriente en presencia de un campo magnético… así que sufrirá una fuerza. Nos interesa específicamente la fuerza sobre la barra, el resto no se va a mover.

$$\bar{F}_m = -\int_0^b \bar{B}_0 \times I d\bar{l}$$

Entonces tenemos una barra de masa m que sufre una fuerza F_m, así que resolvemos Newton para obtener $x(t)$, $v(t)$ y, con ellas, $I(t)$.

$$m\ddot{x} = m\dot{v} = F_m^{(x)}$$

Comentarios finales

Con esto ya deberían poder encarar hasta el ejercicio 5.6, más unas aclaraciones

Ejercicio 3: Tienen que hacer algo parecido al ejercicio 4, pero más fácil porque $v(t)$ es constante y dada.

Ejercicio 4: Ilustra el principio del ***frenado magnético***, que emula la viscosidad. Les recomiendo hacerlo a conciencia y consultarlo.

Ejercicio 5: Encararlo similar al ejercicio 2, pero ahora el campo no es constante.

Ejercicio 6: Acá si varía el campo magnético, la idea es que usen la forma diferencial de la ley de Faraday y resuelvan para el campo eléctrico haciendo una analogía con el campo magnético y Ampere (¡piensenlo!).

Se terminó el campo eléctrico conservativo