

Física 3-Cátedra Dmitruk

Clase 2

Guía 6

Facundo Pugliese

Corriente alterna: Repaso teórico

Con lo que vemos hoy van a poder hacer del ejercicio 6.6 al 6.16 (inclusive).
Repasando rápidamente la teoría, para un circuito RLC tenemos

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(\varepsilon_0 e^{j\omega t})$$

Cómo el transitorio decae a 0 en un tiempo finito, $q(t) = \operatorname{Re}(Qe^{j\omega t}) \quad Q \in \mathbb{C}$
miro las soluciones estacionarias con frecuencia ω $i(t) = \operatorname{Re}(Ie^{j\omega t}) \quad I \in \mathbb{C}$

Y usando que $\frac{dq}{dt} = i \implies \operatorname{Re}(j\omega Qe^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(Ie^{j\omega t}) \implies j\omega Q = I$

Reemplazamos en la ecuación y “tachamos” los Re (los asumimos implícitos)

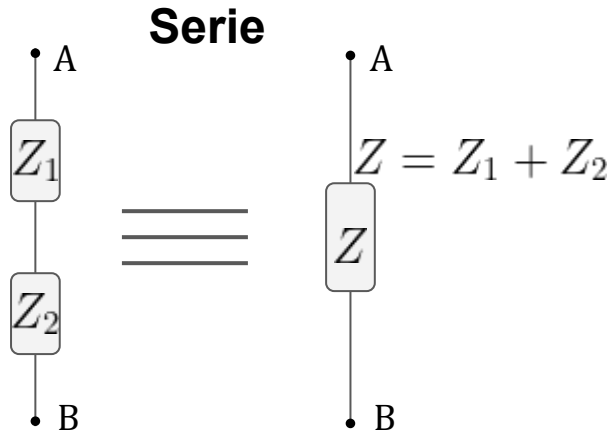
$$Lj\omega I + RI + \frac{I}{j\omega C} = \varepsilon_0 \iff \left(Lj\omega + R + \frac{1}{j\omega C} \right) I = \varepsilon_0 \iff Z(\omega)I = \varepsilon_0$$

Corriente alterna: Impedancias

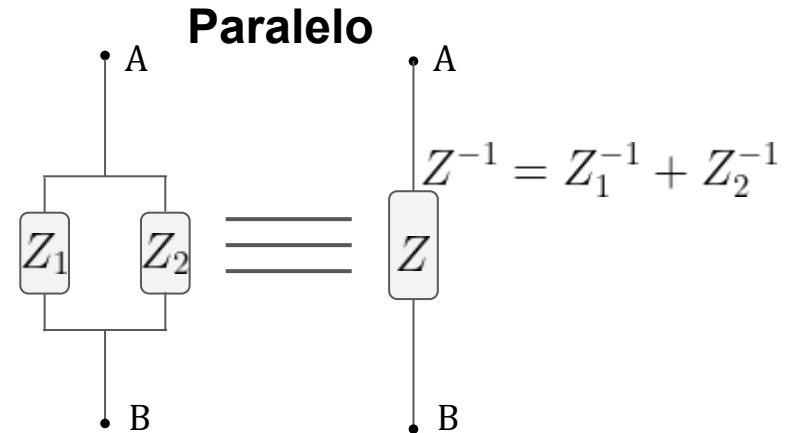
Capacitor: $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

Resistencia: $Z_R = R$

Inductancia: $Z_L = j\omega L$



Suman cómo resistencias. Para Z_C recuperamos los capacitores



Leyes de Kirchoff:

Nodos: $\sum_k I_k = 0$

Mallas: $\sum_k Z_k I_k = \sum_j \varepsilon_j$

Todas las fuentes deben tener la misma frecuencia

Repaso veloz de números complejos

Forma cartesiana

$$z = x + jy$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

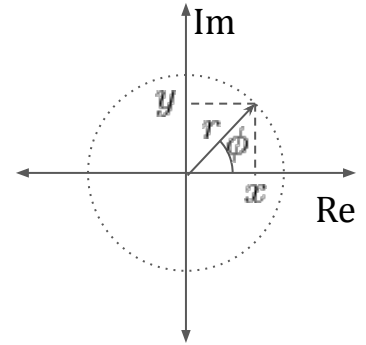
$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

Forma polar

$$z = re^{j\phi}$$



Conjugado: $z^* = x - jy = re^{j(-\phi)}$

Norma: $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

Inverso: $z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1}{r}e^{-j\phi}$

Producto: $z = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)} = re^{j\phi}$
 $r = r_1 r_2$

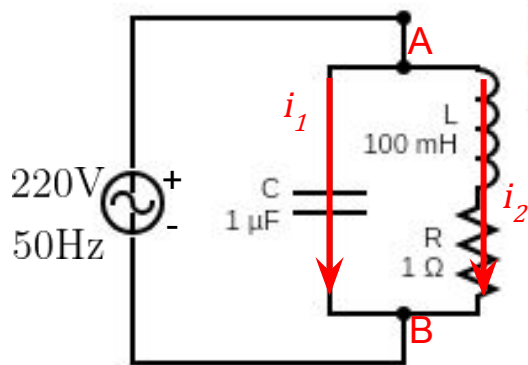
Suma: $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) = x + jy$
 $x = x_1 + x_2$ $y = y_1 + y_2$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

Parte real: $2\text{Re}(z) = z + z^*$

Parte imaginaria: $2j\text{Im}(z) = z - z^*$

Ejercicio 6.6: Calentando



Un condensador $C = 1 \mu\text{F}$ está conectado en paralelo con una inductancia $L = 0.1 \text{ H}$ cuya resistencia interna vale $R = 1 \Omega$. Al conectar la combinación a una fuente alterna de 220 V y 50 Hz determinar:

- La corriente en cada elemento del circuito.
- La corriente total por la fuente.
- La potencia total disipada.

Cómo tenemos una sola fuente, le ponemos fase nula $\varepsilon \in \mathbb{R}$

Definimos las corrientes de rama i_1 e i_2 y la caída de potencial entre A y B

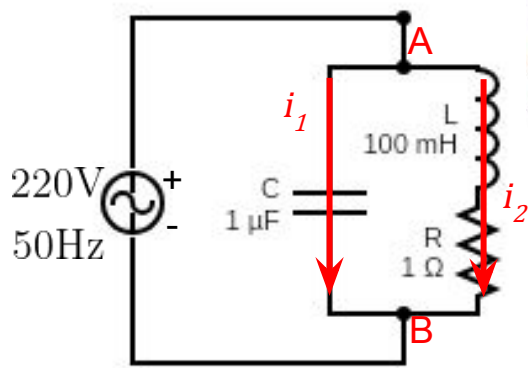
$$V_{AB} = -\varepsilon = -Z_1 i_1 = -Z_2 i_2$$

Pero ¿quienes son Z_1 y Z_2 ? En la rama 1 tenemos solo un capacitor
En 2 tengo una R y una L en serie; sus impedancias se suman

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_2 = Z_R + Z_L = R + j\omega L$$

Ejercicio 6.6: Calentando



Un condensador $C = 1 \mu\text{F}$ está conectado en paralelo con una inductancia $L = 0.1 \text{ H}$ cuya resistencia interna vale $R = 1 \Omega$. Al conectar la combinación a una fuente alterna de 220 V y 50 Hz determinar:

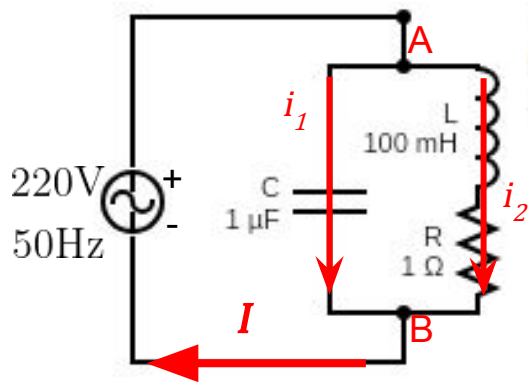
- La corriente en cada elemento del circuito.
- La corriente total por la fuente.
- La potencia total disipada.

$$i_1 = \varepsilon j\omega C \implies i_1(t) = \text{Re}(i_1 e^{j\omega t}) = \text{Re}(\varepsilon\omega C j e^{j\omega t}) = \text{Re}(\varepsilon\omega C e^{j(\omega t + \pi/2)}) \implies i_1(t) = \varepsilon\omega C \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i_2 = \frac{\varepsilon}{R + j\omega L} = \frac{\varepsilon}{R + j\omega L} \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} = \frac{\varepsilon(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} = \varepsilon A_2 e^{j\varphi} \quad \text{Forma polar de } 1/Z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = \left| \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right| = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\dots)}{\text{Re}(\dots)}\right) = \arctan\left(-\frac{\omega L}{R}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \end{array} \right. \longrightarrow i_2(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

Ejercicio 6.6: Calentando



Un condensador $C = 1 \mu\text{F}$ está conectado en paralelo con una inductancia $L = 0.1 \text{ H}$ cuya resistencia interna vale $R = 1 \Omega$. Al conectar la combinación a una fuente alterna de 220 V y 50 Hz determinar:

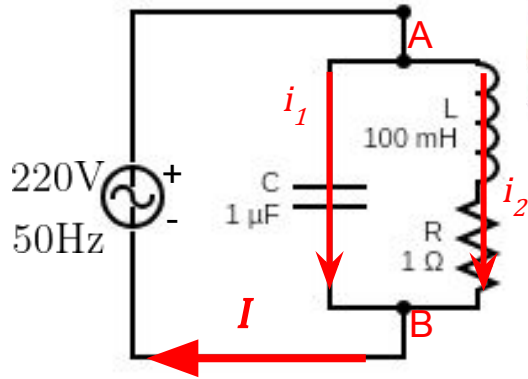
- La corriente en cada elemento del circuito.
- La corriente total por la fuente.
- La potencia total disipada.

Usando ley de nodos en B $I = i_1 + i_2 = \frac{\varepsilon}{Z_1} + \frac{\varepsilon}{Z_2} = \frac{\varepsilon}{Z_{eq}} \quad Z_{eq} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)^{-1}$

$$Z_{eq}^{-1} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1 + j\omega C(R + j\omega L)}{R + j\omega L} = \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}{R + j\omega L} = \sqrt{\frac{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j\theta}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) + \varphi$$

Ejercicio 6.6: Calentando



Un condensador $C = 1 \mu\text{F}$ está conectado en paralelo con una inductancia $L = 0.1 \text{ H}$ cuya resistencia interna vale $R = 1 \Omega$. Al conectar la combinación a una fuente alterna de 220 V y 50 Hz determinar:

- La corriente en cada elemento del circuito.
- La corriente total por la fuente.
- La potencia total disipada.

Recordar que $\omega = 2\pi f = 2\pi 50 \text{ Hz}$

$$i_1(t) = \varepsilon \omega C \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \approx -0.49\pi$$

$$i_2(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$\theta(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) + \varphi(\omega) \approx -0.49\pi$$

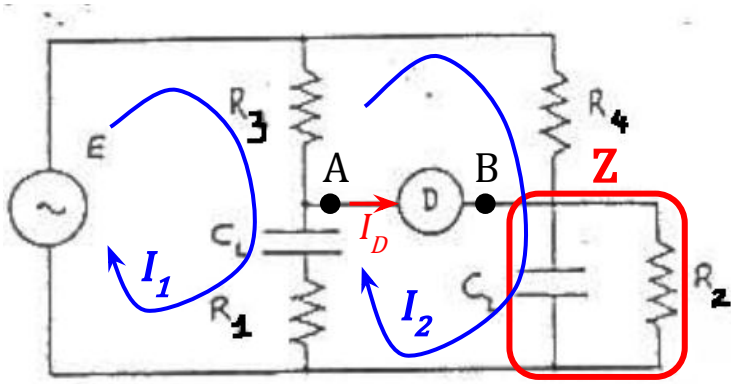
$$I(t) = \sqrt{\frac{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}{R^2 + (\omega L)^2}} \varepsilon \cos(\omega t + \theta(\omega))$$

$$\mathcal{P}(t) = i_2(t)^2 R = \frac{R \varepsilon^2}{R^2 + (\omega L)^2} \cos^2(\omega t + \varphi(\omega))$$

$\approx 50 \text{ W}$

Ejercicio 6.10: Puentes y equilibrios

10. Deducir las condiciones de equilibrio para el puente de Wien de la figura. En particular, si $C_1 = C_2$ y $R_1 = R_2$, hallar el cociente R_3/R_4 requerido para el equilibrio



$$\text{Equilibrio} \Leftrightarrow I_D = 0 \Leftrightarrow V_{AB} = 0$$

Puedo ignorar la rama con D (abierta) y resolver solo 2 corrientes de malla I_1 e I_2
 Por simplicidad reemplazo C_2 y R_2 por Z

$$Z^{-1} = (R_2)^{-1} + j\omega C_2$$

$$1) \quad \varepsilon = R_3(I_1 - I_2) + \frac{1}{j\omega C_1}(I_1 - I_2) + R_1(I_1 - I_2)$$

$$2) \quad 0 = R_4 I_2 + Z I_2 + \underbrace{R_3(I_2 - I_1) + \frac{1}{j\omega C_1}(I_2 - I_1) + R_1(I_2 - I_1)}_{-\varepsilon}$$

$$I_1 = I_2 + \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3 + (j\omega C_1)^{-1}}$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_4 + Z}$$

Ejercicio 6.10: Puentes y equilibrios

$$I_1 = I_2 + \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3 + (j\omega C_1)^{-1}}$$

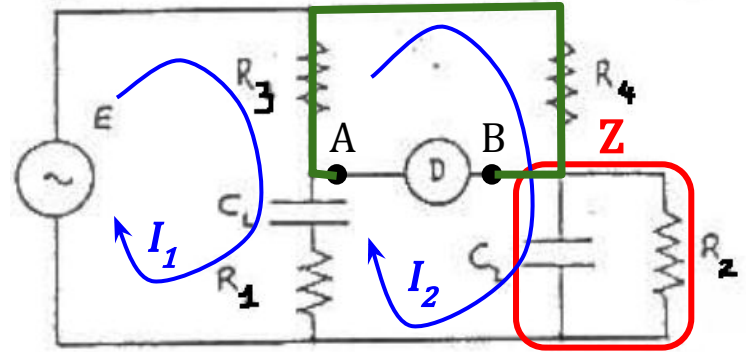
$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_4 + Z}$$

Falta $V_{AB} = 0$ para obtener la condición

$$0 = V_{AB} = -R_3(I_2 - I_1) - R_4 I_2$$

Y reemplazando sale:

$$\begin{aligned} \frac{R_3 \varepsilon}{R_3 + R_1 + (j\omega C_1)^{-1}} &= \frac{R_4 \varepsilon}{R_4 + Z} \\ R_4 (R_3 + R_1 + (j\omega C_1)^{-1}) &= R_3 (R_4 + Z) \\ R_4 (R_1 + (j\omega C_1)^{-1}) &= R_3 Z \\ \frac{R_1 + (j\omega C_1)^{-1}}{Z} &= \frac{R_3}{R_4} \end{aligned}$$

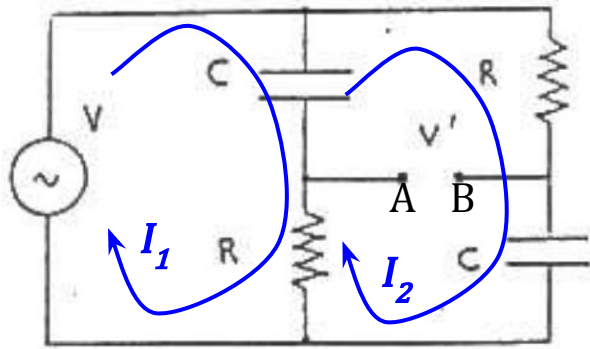


$$\begin{aligned} \frac{R_3}{R_4} &= (R_1 + (j\omega C_1)^{-1}) (R_2^{-1} + j\omega C_2) \\ \frac{R_3}{R_4} &= \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \right) + j \left(\omega R_1 C_2 - \frac{1}{\omega R_2 C_1} \right) = 0 \end{aligned}$$

Igualando parte real e imaginaria salen 2 condiciones: amplitud y fase

Si $R_1 = R_2 = R$ y $C_1 = C_2 = C$, tenemos $R_3 = 2R_4$ y $\omega RC = 1$

Ejercicio 6.12 (retocado): Thevenin



Para el circuito de la figura:

- Hallar V' y mostrar que $|V|=|V'|$
- Graficar la diferencia de fase entre V y V' en función de ω
- Hallar el equivalente de Thevenin desde los bornes de V'

En (a), resolvemos las corrientes de malla I_1 e I_2 igual que para el 6.10 y sale

$$V - (I_1 - I_2)R - (I_1 - I_2)\frac{1}{j\omega C} = 0$$

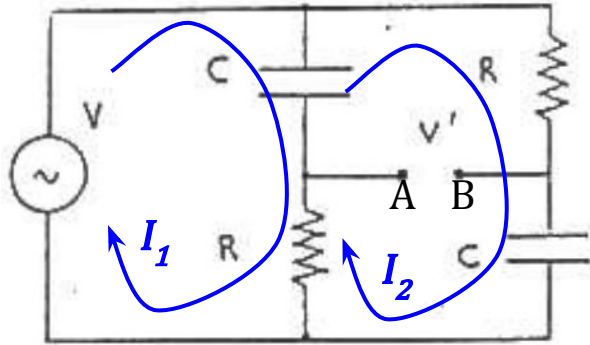
$$-I_2R - I_2\frac{1}{j\omega C} - (I_2 - I_1)R - (I_2 - I_1)\frac{1}{j\omega C} = 0$$

$$I_1 = I_2 + \frac{V}{R + (j\omega C)^{-1}} = 2I_2$$

$$I_2 = \frac{V}{R + (j\omega C)^{-1}}$$

$$V' = V_{AB} = -(I_2 - I_1)\frac{1}{j\omega C} - I_2R = I_2\left(\frac{1}{j\omega C} - R\right) = V\frac{(j\omega C)^{-1} - R}{(j\omega C)^{-1} + R} = V\frac{-Z^*}{Z} \implies |V'| = |V|\left|\frac{-Z^*}{Z}\right| = |V|$$

Ejercicio 6.12 (retocado): Thevenin

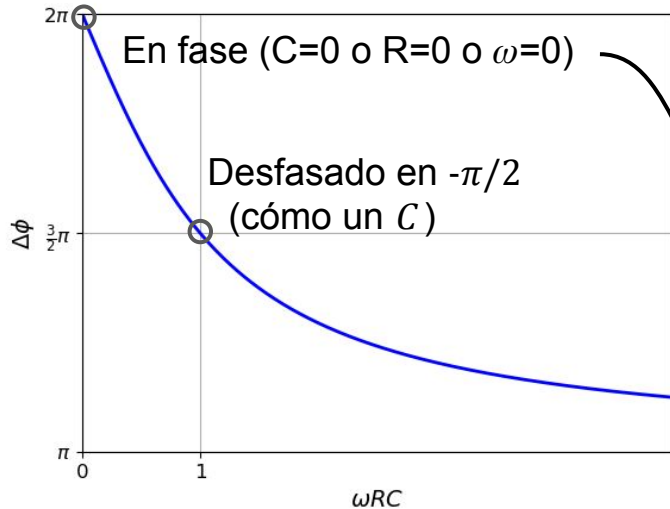


En (b), buscamos la diferencia de fase entre V y V' , pero es igual a la diferencia de fase entre $-Z^*$ y Z

$$\frac{V'}{V} = \frac{-Z^*}{Z} = e^{j\Delta\phi} \implies \Delta\phi = \phi(-1) + \phi(Z^*) - \phi(Z) = \pi - 2\phi(Z)$$

Con $Z = R + (j\omega C)^{-1} = R - j\frac{1}{\omega C} \implies \phi(Z) = -\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$

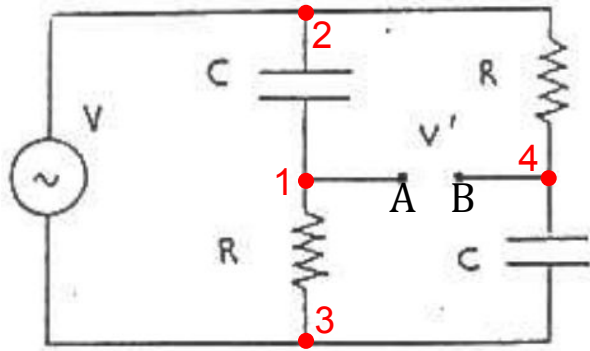
$$\Delta\phi(\omega) = \pi + 2\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$



- Si $C=0$, no hay nada que introduzca desfase
- Si $\omega=0$, estamos en corriente continua
- Si $R=0$, A y B están conectadas a la fuente

En contrafase: No le da tiempo al capacitor a cargarse/descargarse $\tau = \frac{2\pi}{\omega} \ll RC = \tau_{descarga}$

Ejercicio 6.12 (retocado): Thevenin



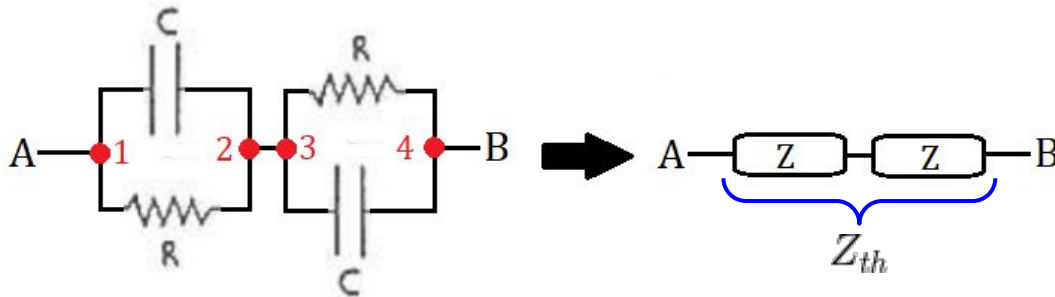
Para hacer Thevenin, es exactamente igual que en continua (ahora sumamos Z en lugar de R), así que ya tenemos la fuente compleja

$$\varepsilon_{th} = V_{AB} = V e^{j\Delta\phi}$$

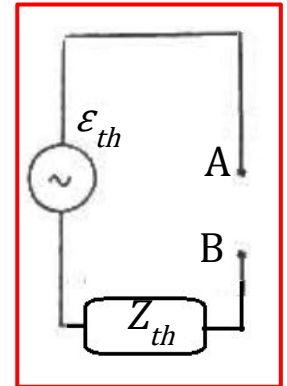
El sistema es fácil de reducir usando $Z^{-1} = R^{-1} + j\omega C$

Si cortocircuito V , $3=2$

$$Z_{th} = Z + Z = 2Z = \frac{2R}{1 + j\omega RC}$$



Equivalente de Thevenin



Digresión: Sobre potencias y partes reales



Para calcular la potencia (*instantánea*) disipada en una impedancia Z , volvemos a la definición original

$$\mathcal{P}(t) = V_{AB}(t)i_{AB}(t)$$

Conociendo la amplitud compleja de la corriente I , la caída de potencial y corriente **reales** son

$$i_{AB}(t) = \text{Re}(Ie^{j\omega t}) = \frac{Ie^{j\omega t} + I^*e^{-j\omega t}}{2}$$
$$V_{AB}(t) = \text{Re}(ZIe^{j\omega t}) = \frac{ZIe^{j\omega t} + Z^*I^*e^{-j\omega t}}{2}$$

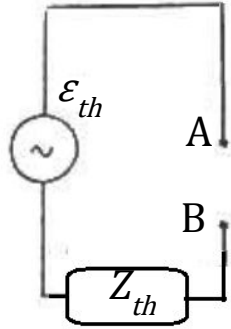
$$\mathcal{P}(t) = \frac{Ie^{j\omega t} + I^*e^{-j\omega t}}{2} \frac{ZIe^{j\omega t} + Z^*I^*e^{-j\omega t}}{2} = \frac{1}{4} [ZI^2e^{2j\omega t} + Z^*(I^*)^2e^{-2j\omega t} + IZ^*I^* + I^*ZI]$$

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{4} [2\text{Re}(ZI^2e^{2j\omega t}) + (Z + Z^*)|I|^2] \implies \mathcal{P}(t) = \frac{1}{2} [\text{Re}(ZI^2e^{2j\omega t}) + \text{Re}(Z)|I|^2]$$

En general, nos interesa la potencia media, definida en un período como

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathcal{P}(t) dt = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [\text{Re}(ZI^2e^{2j\omega t}) + \text{Re}(Z)|I|^2] dt \implies \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(Z)|I|^2$$

Thevenin: Teorema de máxima transferencia



Para un Thevenin arbitrario con ε_{th} y Z_{th} queremos la impedancia Z arbitraria que disipará la máxima potencia media $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$

$$Z = R + jX$$

La corriente será $I = \frac{\varepsilon_{th}}{Z_{th} + Z}$

La potencia media disipada en Z es $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\text{Re}(Z)|I|^2}{2}$

Para este equivalente de Thevenin: $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{R}{2} \frac{|\varepsilon_{th}|^2}{|Z_{th} + Z|^2} = \frac{|\varepsilon_{th}|^2}{2} \frac{R}{(R_{th} + R)^2 + (X_{th} + X)^2}$

Y lo maximizo

$$\frac{d}{dX} \langle \mathcal{P} \rangle = -\frac{|\varepsilon_{th}|^2 R (X + X_{th})}{[(R_{th} + R)^2 + (X_{th} + X)^2]^2} = 0 \implies X = -X_{th}$$

$$\frac{d}{dR} \langle \mathcal{P} \rangle = -\frac{|\varepsilon_{th}|^2}{2} \left[\frac{1}{(R_{th} + R)^2 + (X_{th} + X)^2} - \frac{2R(R + R_{th})}{[(R_{th} + R)^2 + (X_{th} + X)^2]^2} \right] = -\frac{|\varepsilon_{th}|^2}{2} \frac{(R_{th} + R)^2 - 2R(R + R_{th})}{(R_{th} + R)^4} = 0 \implies R = R_{th}$$

La potencia disipada es máxima para $Z = Z_{th}^*$