<u>Física 3</u>

(Cs. de la atmósfera y los océanos)

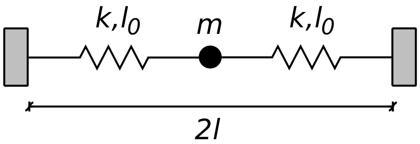
Primer Cuatrimestre 2018

Guía 5: Ecuación de ondas y modos normales

1. Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento para los siguientes sistemas:

   (a) Péndulo de longitud l en un campo gravitatorio constante g. Discuta todas las aproximaciones realizadas. Demuestre que sin dichas aproximaciones, la superposición lineal de dos soluciones no es solución de la ecuación del péndulo.

   (b) Oscilaciones longitudinales del sistema de la figura.



   (c) Oscilaciones transversales del mismo sistema. Analice cuidadosamente las aproximaciones realizadas y describa las diferencias entre los casos $l_0 = l$, $l_0 < l$, y $l_0 = 0$. Compare las frecuencias del modo longitudinal con el transversal.

2. Considere ahora el sistema del ejercicio ??, pero en el que ahora se reemplaza el resorte de la derecha por uno con constante elástica $2k$. Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento para oscilaciones longitudinales. ¿Qué sistema de coordenadas conviene usar?

3. Considere un resorte vertical con constante elástica k y longitud natural l_0, del que cuelga un cuerpo de masa m. Escriba la energía potencial (gravitatoria mas elástica) y encuentre la posición de equilibrio. Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento usando como cero de coordenadas la posición de equilibrio. Grafique la energía potencial del resorte y la potencial gravitatoria en función del tiempo, cuando el sistema está oscilando.

4. (a) Verifique si las siguientes expresiones matemáticas cumplen la ecuación de las ondas unidimensional. Grafique las funciones dadas.

      i. $\psi(x,t) = x_0 e^{-\lambda(x-vt)^2}$
      ii. $\psi(x,t) = \beta(x+vt)$
      iii. $\psi(x,t) = x_0 \sin[k(x-vt)]$
      iv. $\psi(x,t) = x_0 \sin[2(kx-\omega t)]$
      v. $\psi(x,t) = x_0 \cos(kx)\sin(\omega t)$

   (b) En aquellas expresiones que satisfacen lo requerido en (a), ¿puede escribir las expresiones en función de $x \pm vt$?

5. Se tiene una cuerda de longitud L y densidad lineal de masa μ sometida a una tensión T_0. Proponga como solución de la ecuación de ondas para un modo normal a la expresión:

$$\psi(x,t) = A\sin(kx+\phi)\cos(\omega t+\theta).$$

   Tome el sistema de coordenadas con $x = 0$ en un extremo de la cuerda y $x = L$ en el otro. Encuentre la forma particular que adopta la solución propuesta en los siguientes casos:

(a) $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$ (ambos extremos están fijos).

(b) $\psi(0,t) = 0$ y $\partial\psi/\partial x(L,t) = 0$ (un extremo está fijo y el otro está libre). ¿Imponer que un extremo se encuentre “libre”, es equivalente a no imponer condiciones de contorno sobre ese extremo? ¿Cómo lograría en la práctica un extremo “libre” para la cuerda?

(c) $\partial\psi/\partial x(0,t) = \partial\psi/\partial x(L,t) = 0$ (ambos extremos se encuentran libres). ¿A qué corresponde el modo de frecuencia mínima? ¿Cuánto vale la frecuencia de oscilación de ese modo?

(d) Ahora tome un sistema de coordenadas con $x = 0$ en el centro de la cuerda. Halle la forma que adopta la solución general propuesta si $\psi(-L/2,t) = \psi(L/2,t) = 0$ (ambos extremos fijos).

6. Se tiene una cuerda de 20 cm de longitud y 5 g de masa, sometida a una tensión de 120 N. Calcule sus modos naturales de oscilación. ¿Son todos audibles para el oído humano?

7. Las cuatro cuerdas de un violín emiten, estando libres, las notas sol$_2$ (198 s^{-1}); re$_3$ (297 s^{-1}); la$_3$ (440 s^{-1}) y mi$_4$ (660 s^{-1}). La primera es de aluminio (ρ = 2.6 g cm^{-3} y diámetro $d_1 = 0.09$ cm); las dos siguientes son de otro material (ρ = 1.2 g cm^{-3} y diámetros $d_2 = 0.12$ cm y $d_3 = 0.1$ cm, y la cuarta es de acero ($\rho = 7.5$ g cm^{-3} y diámetro $d_4 = 0.1$ cm). Calcular las tensiones a las que deben estar sometidas con respecto a la primera.

8. Una cuerda de violín de 30 cm de longitud, emite la nota la$_3$ (440 s^{-1}), en su modo fundamental. Calcule las modificaciones que deben realizarse en la longitud para que de las notas si$_3$ (495 s^{-1}), do$_3$ (528 s^{-1}) y re$_3$ (594 s^{-1}), todas en su modo fundamental.

9. Se tiene un tubo de longitud L. Considere las siguientes posibilidades:

I. El tubo está cerrado en ambos extremos, lleno de aire en su interior.

II. El tubo tiene un extremo cerrado y el otro abierto.

III. Ambos extremos están abiertos.

Considere como datos del problema la velocidad de propagación de las ondas v_s, L, la presión P_0, y la densidad $\rho_0 = \gamma P_0 v_s^{-2}$. Hallar, para cada una de dichas situaciones:

(a) las posibles longitudes de onda con las que puede vibrar el aire en el tubo, y sus correspondientes frecuencias.

(b) Elija un sistema de referencia conveniente, y escriba la expresión más general para el desplazamiento de las partículas $\psi(x,t)$. En dicha expresión, ¿qué parámetros conoce? ¿De qué dependen los parámetros que no conoce?

(c) A partir de la expresión hallada en (b), deducir la expresión de $\delta P(x,t)$ y $\delta\rho(x,t)$.

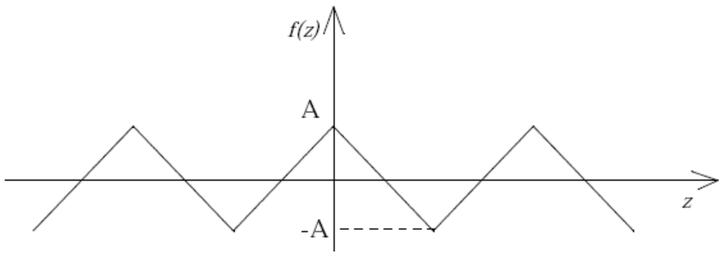
10. (a) ¿Qué longitud debe tener un tubo de órgano abierto en ambos extremos para que produzca en el aire un sonido de 440 Hz?

(b) ¿Qué longitud deberá tener un tubo de órgano cerrado en uno de sus extremos para que produzca el mismo tono en su primer armónico?

11. Considere la función diente de sierra simétrica, entendiendo por tal a aquella función cuyos bordes anterior y posterior tienen la misma pendiente (ver figura). Sitúe el origen del sistema de coordenadas ($z = 0$) en una de las crestas y demuestre que la función tiene un desarrollo de Fourier de la forma

$$f(z) = \frac{8A}{\pi^2}\left[\cos(kz) + \frac{1}{9}\cos(3kz) + \frac{1}{25}\cos(5kz) + \dots\right],$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ (λ es la longitud entre crestas del diente de sierra) y A es la amplitud del diente de sierra.



12. Obtenga el desarrollo en serie de Fourier de las siguientes funciones:

 (a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \frac{L}{4} \\ A & \text{si } \frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4} \\ 0 & \text{si } \frac{3L}{4} < x < L. \end{cases}$$

 (b)

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{si } 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

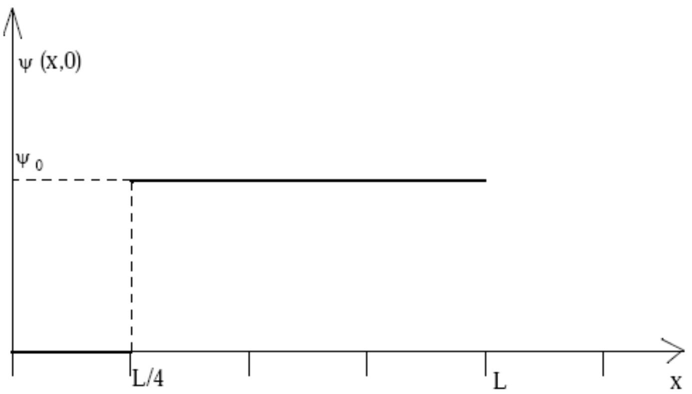
13. Considere una cuerda de longitud L y densidad de masa uniforme μ_0 sujeta en ambos extremos y sometida a una tensión T_0. En $t = 0$ la cuerda se suelta de modo que su forma está dada por la siguiente función:

$$\psi(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right),$$

 (el sistema de coordenadas tiene $x = 0$ en un extremo de la soga, y $x = L$ en el otro).

 (a) Halle $\psi(x, t)$.
 (b) Grafique $\psi(x, t)$ para $\omega_1 t = 0, \pi/5, \pi/3$, y $\pi/2$ (ω_1 es la frecuencia fundamental). ¿Qué clase de simetría tiene $\psi(x, t)$ alrededor de $\omega_1 t = \pi/2$? ¿Y alrededor de π? ¿Cómo espera que sea $\psi(x, t)$ para $\omega_1 t = 2\pi$?

14. Considere una cuerda de longitud L y densidad de masa uniforme μ_0 sometida a una tensión T_0, con un extremo fijo y el otro libre. Se le da a la cuerda la forma mostrada en la figura, y en $t = 0$ se la suelta.



(a) Usando el sistema de coordenadas indicado en la figura, halle $\psi(x,t)$.

(b) Graficar $\psi(x,t)$ para $\omega_1 t = 0, \pi/3$, y $\pi/2$.

(c) Si tomara un sistema de coordenadas con el origen en el extremo libre de la cuerda, diga qué es lo que cambiaría. ¿Es conveniente ese sistema de coordenadas?

15. Considere una cuerda de longitud L, sometida a una tensión T_0 y con densidad lineal μ_0. Sea $\psi(x,t)$ la elongación de la cuerda.

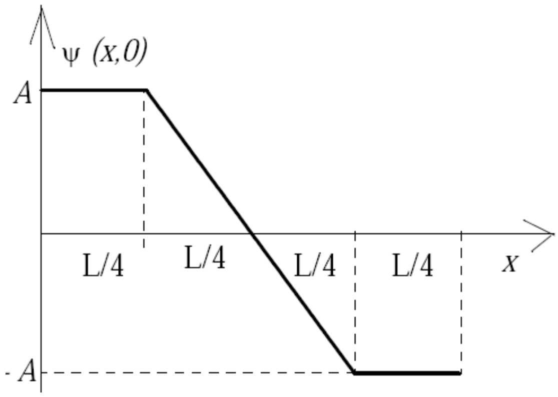
(a) Escriba la expresión más general que representa un modo normal en dicha cuerda, es decir, la expresión más general de una onda estacionaria.

(b) Sabiendo que la cuerda tiene un extremo libre y otro fijo, y que el sistema de coordenadas con el que trabaja es tal que el extremo libre está en $x = 0$ y el extremo fijo está en $x = L$, imponga las condiciones de contorno y determine las constantes pertinentes.

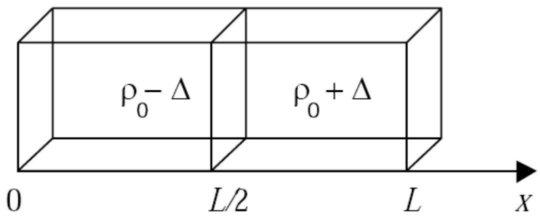
(c) Usando la relación de dispersión, obtenga las posibles frecuencias temporales ν_n.

(d) Si $\psi(x,0) = 0$ y $\partial\psi/\partial t(x,0) = v_0 \cos[3\pi/(2L)]$, obtenga la amplitud y fase de cada modo y halle $\psi(x,t)$.

16. Se tiene una cuerda de longitud L, sometida a una tensión T_0 y con densidad lineal μ_0, con ambos extremos libres. En $t = 0$, la velocidad de todos los puntos de la cuerda es nula, y la deformación es la que se muestra en la figura. Elija un sistema de coordenadas y halle $\psi(x,t)$. Describa cualitativamente el movimiento de los extremos de la cuerda en función del tiempo. Dicho movimiento, ¿corresponde a oscilaciones armónicas?



17. Se tiene un tubo de longitud L cerrado en ambos extremos como se indica en la figura. El tubo presenta un tabique ubicado en la mitad del tubo. De un lado del tabique hay un gas con densidad $\rho_0 - \Delta$, y del otro lado hay un gas de densidad $\rho_0 + \Delta$ (considere $\Delta \ll \rho_0$). Todo el gas se encuentra en reposo. En $t = 0$ se quita el tabique y se deja evolucionar al sistema.



(a) Escriba la expresión para un modo normal $\psi_n(x,t)$ en el tubo, imponiendo las condiciones de contorno. ¿Cuáles son las longitudes de onda permitidas? (ψ es el desplazamiento de los elementos del gas).

(b) Escriba la expresión de $\rho(x,0)$ y de $\psi(x,0)$; y grafíquelas. Sugerencia: hallar $\psi(x,0)$ a partir de $\rho(x,0)$, y usando las condiciones de contorno.

(c) Usando las condiciones iniciales, halle $\psi(x,t)$ y $\rho(x,t)$.

(d) Halle $\rho(x,L/v)$ y $\rho(x,2L/v)$. Compárelas con $\rho(x,0)$.

Datos: ρ_0, Δ, L, y v (velocidad del sonido en el gas).