Teorema fundamental del cálculo vectorial (a.k.a. Teorema de Helmholtz)

Brevísima y sesgada introducción para Física 3

Ariel Chernomoretz

August 21, 2019

1 El teorema de Helmholtz

El siguiente teorema se conoce como el *teorema fundamental del análisis vectorial.*
Teorema: Un campo vectorial continuo, $\vec{A}$, puede descomponerse como suma de un gradiente y un rotor:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{\omega}(\vec{r}) \tag{1}$$

donde ϕ se denomina *potencial escalar* y $\vec{\omega}$ *potencial vector.*
Prueba Dado el campo de interés, $\vec{A}$, para esta demostración vamos a introducir un campo vectorial auxiliar $\vec{v}(\vec{r})$ definido como:

$$\vec{v}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Asumiremos además que $\vec{A} \to 0$ al menos como $1/r^2$, de manera que la integral converja, aún cuando V sea tomado como todo el espacio.

Comencemos aplicando el operador laplaciano a ambos miembros de la igualdad. Componente a componente, debe valer que

$$\nabla^2 v_i(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V A_i(\vec{r}')\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{2}$$

1. Concentremonos primero en entender que significa la expresión $\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ que aparece

en el integrando. Para ello notemos que el gradiente de $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ es

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \forall \vec{r} \neq 0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \frac{1}{r} &= \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) \\
&= \vec{\nabla}.\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \\
&= 0 \qquad \forall \vec{r} \neq 0
\end{aligned}$$

así que el Laplaciano de $1/r$ es un campo escalar identicamente nulo en todo punto **salvo** en el origen.

Para ver que ocurre en ese punto en particular notemos que, usando el teorema de Gauss, una integral de volumen de dicha función se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV &= \int_V \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) = \oint_{S(V)} -\frac{\vec{r}}{r^3}.d\vec{S} \\
&= -\oint_{S(V)} \frac{\vec{r}.\hat{n}}{r^2}.dS = -\oint_{S(V)} d\Omega
\end{aligned}$$

Como vimos en clase, la última integral es la del ángulo sólido subtendido por una superficie cerrada desde el origen. Por lo tanto:

$$\int_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV = \begin{cases} -4\pi & \text{si } \vec{r} = 0 \in V \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Por lo tanto encontramos que $\nabla^2 \frac{1}{r}$ es nulo en todo el espacio, excepto el origen, y que su integral sobre cualquier volumen que incluya al origen e sigual a -4π. Estas son justamente las propiedades de la Delta de Dirac: $\delta(\vec{r})$, que describimos con un poco más en detalle en la Sección (**??**):

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$$

El caso general se obtiene reemplazando $r = |\vec{r}|$ por $s = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ en cuyo caso

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Esta última expresión es la que estábamos buscando.

2. Con lo que aprendimos, podemos volver ahora a la ecuación (2)

$$\begin{aligned}
\nabla^2 v_i(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int_V A_i(\vec{r}')\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_V A_i(\vec{r}')(-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'))dV' = A_i(\vec{r})
\end{aligned}$$

donde la última igual se desprende de cómo actúa la δ dentro de la integral (ver apunte de Delta de Dirac).

Para poder seguir adelante haremos uso de la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla^2 \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times v)$$

que, junto con el resultado obtenido arriba para la forma funcional que asumimos para $\vec{v}$ permite escribir:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\omega}$$

con

$$\phi = -\vec{\nabla}.\vec{v} \quad \vec{\omega} = -\vec{\nabla} \times \vec{v}$$

Corolario: La divergencia y rotor de un campo vectorial lo definen unívocamente.

1. **Prueba de que rotor y divergencia definen un campo.** Tenemos que

$$\begin{aligned}
\phi = -\vec{\nabla}.\vec{v} &= \vec{\nabla}\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_V A_i(\vec{r}')\partial_i' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV
\end{aligned}$$

La última integral se resuelve integrando por partes:

$$\begin{aligned}\int_V A_i(\vec{r}')\partial_i^{'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV &= \int_V \partial_i^{'}\frac{A_i(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV - \int_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\partial_i^{'}A_i(\vec{r}')dV \\ &= \int_S \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.d\vec{S} - \int_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\partial_i^{'}A_i(\vec{r}')dV\end{aligned}$$

y como la integral de superficie se anula al considerar V como todo el espacio (recordar que $\vec{A} \to 0$ al menos como $1/r^2$) resulta:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{d(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \tag{3}$$

por lo que el potencial escalar, ϕ, queda definido al conocer la divergencia de $\vec{A}(r), d(\vec{r})$.

Así mismo

$$\begin{aligned}\omega_i(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\times\vec{\omega} &= -\epsilon_{ijk}\partial_j\omega_k \\ &= -\epsilon_{ijk}\partial_j\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{A_k(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \\ &= \epsilon_{ijk}\frac{1}{4\pi}\int_V A_k(\vec{r}')\partial_j^{'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'\end{aligned}$$

nuevamente, integrando por partes y reconociendo que la integral de superficie se anula obtenemos que:

$$\vec{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{c}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \tag{4}$$

con ϕ y $\vec{\omega}$ definidos, queda definido nuestro campo de interés $\vec{A}$.

2. **Prueba de que el campo definido es único.**

   Supongamos que hay dos campos, $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ para los cuales: $\vec{\nabla}.\vec{A}_1 = \vec{\nabla}.\vec{A}_2 = d(\vec{r})$ y $\vec{\nabla}\times\vec{A}_1 = \vec{\nabla}\times\vec{A}_2 = \vec{c}(\vec{r})$.

   Definamos un nuevo campo $\vec{D}(\vec{r}) = \vec{A}_1 - \vec{A}_2$. Este nuevo campo satisface que $\vec{\nabla}.\vec{D} = 0$ y $\vec{\nabla}\times\vec{D} = 0$. Por esta última igualdad sabemos que $\vec{D}$ es un campo conservativo, por lo que $\vec{D} = -\vec{\nabla}\psi$ y por lo tanto: $\nabla^2\psi = 0$.

Vamos a usar ahora la siguiente identidad vectorial

$$\vec{\nabla}.(\chi\vec{\nabla}\psi) = \chi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\chi.\vec{\nabla}\psi$$

Integrando en volumen ambos miembros y usando para el primero el teorema de la divergencia, tenemos que:

$$\int_S \chi\vec{\nabla}\psi.d\vec{S} = \int_V [\chi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\chi.\vec{\nabla}\psi]dV$$

cuando consideramos el caso particular en que $\chi = \psi$

$$\int_V (\vec{\nabla}\psi)^2 dV = \int_S \psi\vec{\nabla}\psi.d\vec{S} = -\int_S \psi\vec{D}.d\vec{S} = 0$$

la última igualdad resulta, como antes, de considerar a todo el espacio como el volumen de integración V, por lo que la superficie borde S se encuentra en el infinito, donde el integrando se anula. En definitiva la última ecuación implica que $\vec{\nabla}\psi = 0$ o $\vec{D} = 0$ o $\vec{A}_1 = \vec{A}_2$

2 Aplicación a campos E y B estáticos

2.1 Electrostática

Las ecuaciones de Maxwell para el campo electrostático definen la forma funcional de la divergencia y el rotor de $\vec{E}$ para todo punto como:

$$d_E(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{c}_E \equiv \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

Utilizando estas expresiones en las ecuaciones 3 y 4 que definen el potencial escalar y vector respectivamente para el campo $\vec{E}$ resulta:

$$\phi_E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \quad (5)$$

$$\vec{\omega}_E(\vec{r}) = 0 \quad (6)$$

por lo que utilizando el teorema fundamental (ec. 1):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \vec{\nabla}\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' \quad (7)$$

2.2 Magnetostática

De la misma manera las ecuaciones de Maxwell determinan que para el campo magnético vale:

$$d_B \equiv \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{c}_B(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Utilizando estas expresiones en las ecuaciones 3 y 4 que definen el potencial escalar y vector respectivamente para el campo $\vec{B}$ resulta:

$$\phi_B(\vec{r}) = 0 \tag{8}$$

$$\vec{\omega}_B(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{9}$$

por lo que utilizando el teorema fundamental (ec. 1) tenemos para $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{10}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \tag{11}$$