Clase 3: Potencial eléctrico y Principio de Superposición

25 de marzo de 2021

Clase 3

- Cálculo del Potencial eléctrico
  - A partir del campo eléctrico
  - Por integración directa
- Cálculo del campo eléctrico usando el principio de superposición

Potencial eléctrico

En la clase teórica vieron que en electrostática:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{1}$$

Y a partir de esta propiedad se puede definir el potencial eléctrico $V(\vec{r})$ de la siguiente manera:

$$V(\vec{r}) = -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.\vec{dl} \tag{2}$$

donde $\vec{r_O}$ es un punto arbitrario.

- Dados V y V', tal que ambos cumplen que -$\vec{\nabla} V = E(\vec{r})$, entonces $V = V' + \mathrm{cte}$
- El potencial no tiene sentido físico, mientras que $\Delta V = V(a) - V(b)$ con a y b dos puntos cualquiera si lo tiene.

Por lo tanto, también se puede definir el potencial:

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{E}.\vec{dl} + \mathrm{cte} \tag{3}$$

Potencial eléctrico

El potencial eléctrico para una distribución de cargas en volumen se puede expresar:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV' + cte \tag{4}$$

Si tenemos una distribución de cargas en superficie:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dS' + cte \tag{5}$$

mientras que si tenemos una distribución lineal de cargas:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dl' + cte \tag{6}$$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Recordemos que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \overbrace{-\nabla V(\vec{r})} = -(\frac{dV}{dr}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}\hat{\theta} + \frac{dV}{dz}\hat{z})$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r.\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Recordemos que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\left(\frac{dV}{dr}\hat{r} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}}_{=0}\hat{\theta} + \underbrace{\frac{dV}{dz}}_{=0}\hat{z}\right)$$

En este caso:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Por lo tanto:

$$V(\vec{r}) = -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} \underbrace{(E_x, E_y, E_z)} . \underbrace{(dx, dy, dz)}$$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_x, E_y, E_z)\,.\,(dx, dy, dz) \\
&= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} \underbrace{(E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta} + E_z\hat{z})}_{}\,.\,\underbrace{(dr\hat{r} + d\theta\hat{\theta} + dz\hat{z})}_{}
\end{aligned}
$$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_x, E_y, E_z) . (dx, dy, dz) \quad = 0 \\
&= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta} + E_z\hat{z}) . (dr\hat{r} + d\theta\hat{\theta} + dz\hat{z}) \quad = 0 \\
&= -\int_{r_O}^{r} \frac{dV}{dr}\hat{r}.\hat{r}dr
\end{aligned}
$$

$\hat{r} . \hat{r} = 1$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Por lo tanto:

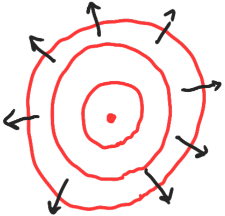
$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_x, E_y, E_z).(dx, dy, dz) \\
&= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta} + E_z\hat{z}).(dr\hat{r} + d\theta\hat{\theta} + dz\hat{z}) \\
&= -\int_{r_O}^{r} \frac{dV}{dr}\hat{r}.\hat{r}dr \\
&= \boxed{-\int_{r_O}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r} \frac{1}{r}\,dr
\end{aligned}$$

$$V(\vec{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(r) - \ln(r_0)\right]$$

Potencial de un hilo infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_x, E_y, E_z)\,.\,(dx, dy, dz) \\
&= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta} + E_z\hat{z})\,.\,(dr\hat{r} + d\theta\hat{\theta} + dz\hat{z}) \\
&= -\int_{r_O}^{r} \frac{dV}{\underline{dr}}\hat{r}.\hat{r}dr \\
&= -\int_{r_O}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr \\
&= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\ln r - \ln r_O)
\end{aligned}
$$



donde puede elegir arbirtrariamente r_O.

LAS SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES SON CILINDROS DE RADIO r

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Recordemos la expresión del campo eléctrico que hallamos en el ejercicio 8:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0}\,\hat{r}\,, & r \leq R\,, \\[2ex] \dfrac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\,\hat{r}\,, & r > R\,. \end{cases}$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Recordemos la expresión del campo eléctrico que hallamos en el ejercicio 8:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0}\,\hat{r}\,, \quad r \leq R\,, \leftarrow \text{dentro} \\[2ex] \dfrac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\,\hat{r}\,, \quad r > R\,. \end{cases}$$

Comencemos por el caso $r < R$:

$$V(\vec{r}) = -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} \underbrace{(E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta} + E_z\hat{z})\,.\,(dr\hat{r} + d\theta\hat{\theta} + dz\hat{z})}$$

$$= -\frac{\rho}{2\epsilon_0}\int_{r_0}^{r} r\,dr = -\frac{\rho}{4\epsilon_0}\left[r^2 - r_0^2\right]$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Recordemos la expresión del campo eléctrico que hallamos en el ejercicio 8:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0}\,\hat{r}\,, & r \leq R\,, \\ \\ \dfrac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\,\hat{r}\,, & r > R\,. \end{cases}$$

Comencemos por el caso $r < R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta} + E_z\hat{z})\,.\,(dr\hat{r} + d\theta\hat{\theta} + dz\hat{z}) \\ &= -\int_{r_O}^{r} \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}.\hat{r}dr \end{aligned}$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Recordemos la expresión del campo eléctrico que hallamos en el ejercicio 8:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \underbrace{\begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}, & r \leq R, \\ \\ \dfrac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}, & r > R. \end{cases}}$$

Comencemos por el caso $r < R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_O}^{r} (E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta} + E_z\hat{z}).(dr\hat{r} + d\theta\hat{\theta} + dz\hat{z}) \\ &= -\int_{r_O}^{r} \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}.\hat{r}dr \\ &= -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho r_O^2}{4\epsilon_0} \longleftarrow \end{aligned}$$

donde r_O es un punto arbitrario.

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$V(\vec{r}) = -\int_{r_0}^{r} \vec{E}.d\vec{r}$$

$$= -\int_{r_0}^{R} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r \, dr - \int_{R}^{r} \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \, dr$$

$$= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_{r_0}^{R} r \, dr - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \int_{R}^{r} \frac{1}{r} \, dr$$

$$= -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} \left[R^2 - r_0^2 \right] - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \left[\ln(r) - \ln(R) \right]$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} \\
&= -\int_{r_O}^{R} \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}.\hat{r}dr - \int_{R}^{r} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr
\end{aligned}
$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} \\
&= -\int_{r_O}^{R} \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}.\hat{r}dr - \int_{R}^{r} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr \\
&= -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho r_O^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln R
\end{aligned}
$$

donde r_O es un punto arbitrario.

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int_{r_O}^{r} \vec{E}.d\vec{r} \\
&= -\int_{r_O}^{R} \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}.\hat{r}dr - \int_{R}^{r} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr \\
&= -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho r_O^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln R
\end{aligned}
$$

donde r_O es un punto arbitrario. De esta manera obtenemos:

$$
V(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho r_O^2}{4\epsilon_0}\,, & r \leq R\,, \\[2em] -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho r_O^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln R\,, & r > R\,. \end{cases}
$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Comencemos por el caso $r < R$:

$$V(\vec{r}) \;=\; -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte}$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Comencemos por el caso $r < R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte} \\ &= -\int \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}.\hat{r}dr + C_1 \end{aligned}$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Comencemos por el caso $r < R$:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte} \\
&= -\int \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}.\hat{r}dr + C_1 \\
&= -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + C_1
\end{aligned}
$$

donde C_1 es una constante.

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$V(\vec{r}) \;=\; -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte}$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte} \\ &= -\int \underbrace{\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}} \hat{r}.\hat{r} dr + C_2 \end{aligned}$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte} \\
&= -\int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr + C_2 \\
&= -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + C_2
\end{aligned}
$$

donde C_2 es una constante.

dentro $\rightarrow V = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + C_1$

fuera $\longrightarrow V = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln(r) + C_2$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte} \\ &= -\int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr + C_2 \\ &= -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + C_2 \end{aligned}$$

donde C_2 es una constante. Ahora tenemos que determinar C_1 y C_2 para que $V(r)$ sea continuo en todo punto del espacio. Para ellos tenemos que pedir que V sea continuo en $r = R$:

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte} \\ &= -\int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr + C_2 \\ &= -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + C_2 \end{aligned}$$

donde C_2 es una constante. Ahora tenemos que determinar C_1 y C_2 para que $V(r)$ sea continuo en todo punto del espacio. Para ellos tenemos que pedir que V sea continuo en $r = R$:

$$-\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln R + C_2 = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + C_1$$

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R (otra manera)

Veamos ahora el caso $r > R$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.d\vec{r} + \mathrm{cte} \\ &= -\int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}.\hat{r}dr + C_2 \\ &= -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + C_2 \end{aligned}$$

donde C_2 es una constante. Ahora tenemos que determinar C_1 y C_2 para que $V(r)$ sea continuo en todo punto del espacio. Para ellos tenemos que pedir que V sea continuo en $r = R$:

$$-\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln R + C_2 = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + C_1$$

Elegimos $C_2 = 0$ y $C_1 = \overset{+}{\cancel{-}}\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \overset{-}{\cancel{+}} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln R$.

Potencial de un cilindro infinito con densidad de carga uniforme ρ y radio R

En resumen, obtenemos:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\rho r^2}{4\epsilon_0}, & r \leq R\,, \\[2ex] -\dfrac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln r + \boxed{\dfrac{\rho R^2 \ln R}{2\epsilon_0} - \dfrac{\rho R^2}{4\epsilon_0},} & r > R\,. \end{cases}$$

$$\lim V(r \to \infty) = \underbrace{\ln(r)}_{\to \infty} + cte$$

LAS SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES SON CILINDROS DE RADIO r

Potencial de un plano infinito con carga uniforme σ

Calculamos ahora el potencial $V(r)$ para $z > 0$:

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{E}.\vec{dr} = -\int (E_x, E_y, E_z).(dx, dy, dz) + \mathrm{cte}$$

Potencial de un plano infinito con carga uniforme σ

Calculamos ahora el potencial $V(r)$ para $z > 0$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.\vec{dr} = -\int (E_x, E_y, E_z).(dx, dy, dz) + \mathrm{cte} \\ &= -\int \underbrace{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}\hat{z}\,.\,\hat{z}\,dz + C_1 \\ &= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot z + C_1 \end{aligned}$$

Potencial de un plano infinito con carga uniforme σ

Calculamos ahora el potencial $V(r)$ para $z > 0$:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.\vec{dr} = -\int (E_x, E_y, E_z).(dx, dy, dz) + \mathrm{cte} \\
&= -\int \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\,.\,\hat{z}\,dz + C_1 \\
&= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_1
\end{aligned}
$$

donde C_1 es una constante. El cálculo para $z < 0$ es análogo y quedará una constante C_2 a determinar:

$$
V(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_1 & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_2 & z < 0 \end{cases}
$$

Pidiendo que $V(z=0)$ sea continua, obtenemos $C_1 = C_2$. A su vez, elegimos $C_1 = C_2 = 0$

Potencial de un plano infinito con carga uniforme σ

Calculamos ahora el potencial $V(r)$ para $z > 0$:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int \vec{E}.\vec{dr} = -\int (E_x, E_y, E_z).(dx, dy, dz) + \mathrm{cte} \\
&= -\int \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\,.\,\hat{z}\,dz + C_1 \\
&= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_1
\end{aligned}
$$

donde C_1 es una constante. El cálculo para $z < 0$ es análogo y quedará una constante C_2 a determinar:

$$
V(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_1 & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_2 & z < 0 \end{cases}
$$

Pidiendo que $V(z = 0)$ sea continua, obtenemos $C_1 = C_2$. A su vez, elegimos $C_1 = C_2 \neq 0$

Potencial de un plano infinito con carga uniforme σ

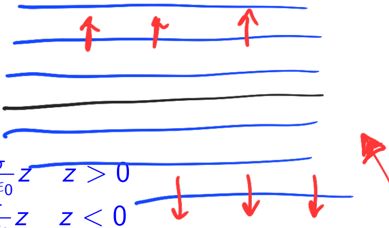
Finalmente obtenemos:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z & z < 0 \end{cases}$$

Se puede verificar que el potencial es continuo en todo el espacio.

Potencial de un plano infinito con carga uniforme σ

Finalmente obtenemos:

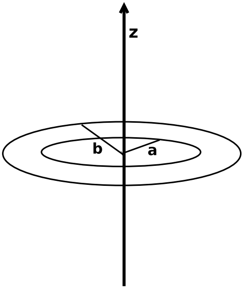


$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z & z < 0 \end{cases}$$

Se puede verificar que el potencial es continuo en todo el espacio.

LAS SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES SON PLANOS INFINITOS A Z=CTE

Calcular el potencial eléctrico de un corona circular de radio interior a y radio exterior b sobre el eje z:

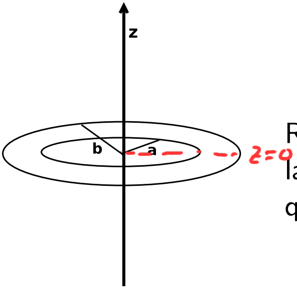


Vamos a usar la expresión:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dS' + \mathrm{cte}$$

Potencial eléctrico por integración directa

Calcular el potencial eléctrico de un corona circular de radio interior *a* y radio exterior *b* sobre el eje *z*:



Vamos a usar la expresión:

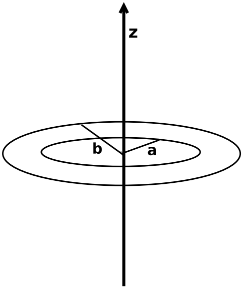
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dS' + \mathrm{cte}$$

Recordemos que
las variables primadas corresponden a los puntos que son fuente del campo y potencial eléctrico:

$$\vec{r'} = (\underbrace{r'\cos\theta'}_{x'}, \underbrace{r'\sin\theta'}_{y'}, 0)$$

Potencial eléctrico por integración directa

Calcular el potencial eléctrico de un corona circular de radio interior a y radio exterior b sobre el eje z:



Vamos a usar la expresión:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dS' + \mathrm{cte}$$

Recordemos que
las variables primadas corresponden a los puntos que son fuente del campo y potencial eléctrico:

$$\vec{r'} = (r'\cos\theta', r'\sin\theta', 0)$$

mientras que $\vec{r}$ es la posición de los puntos donde queremos calcular el campo, en este caso el eje z, De manera que :

$$\underbrace{\vec{r} = (0,0,z)}_{*\text{Eje } z} \quad (\vec{r}-\vec{r'}) = (-r'\cos\theta', -r'\sin\theta', z) \quad |\vec{r}-\vec{r'}| = \sqrt{r'^2+z^2}$$

A su vez:

$$dS' = \underbrace{dx'dy'} = \underbrace{r'dr'd\theta'}$$

De esta manera, podemos calcular el potencial:

$$V(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{\sigma r' dr' d\theta'}{\sqrt{r'^2+z^2}} + \text{cte}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_a^b \frac{r'}{\sqrt{r'^2+z^2}} dr' + cte$$

A su vez:

$$dS' = dx'dy' = r'dr'd\theta'$$

De esta manera, podemos calcular el potencial:

$$\begin{aligned} V(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{\sigma r'dr'd\theta'}{\sqrt{r'^2+z^2}} + \mathrm{cte} \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0}\int_a^b \frac{\sigma r'dr'}{\sqrt{r'^2+z^2}} + \mathrm{cte} \end{aligned}$$

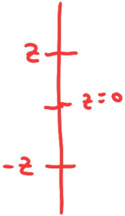
Potencial eléctrico por integración directa

A su vez:

$$dS' = dx'dy' = r'dr'd\theta'$$

De esta manera, podemos calcular el potencial:

$$\begin{aligned} V(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{\sigma r'dr'd\theta'}{\sqrt{r'^2+z^2}} + \mathrm{cte} \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0}\int_a^b \frac{\sigma r'dr'}{\sqrt{r'^2+z^2}} + \mathrm{cte} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{r'^2+z^2}\Big|_a^b \end{aligned}$$



$$V(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{b^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right]$$

Potencial eléctrico por integración directa

A su vez:

$$dS' = dx'dy' = r'dr'd\theta'$$

De esta manera, podemos calcular el potencial:

$$\begin{aligned}
V(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{\sigma r' dr' d\theta'}{\sqrt{r'^2+z^2}} + \mathrm{cte} \\
&= \frac{1}{2\epsilon_0}\int_a^b \frac{\sigma r' dr'}{\sqrt{r'^2+z^2}} + \mathrm{cte} \\
&= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{r'^2+z^2}\Big|_a^b \\
&= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{b^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right)
\end{aligned}$$

Pregunta: Puedo calcular el campo eléctrico en todo el espacio a partir de la expresión anterior del potencial?

Potencial eléctrico por integración directa

Recordar que :

$$\vec{E}(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z)$$

y en el ejercicio calculamos $\vec{E}(0, 0, z)$
A su vez:

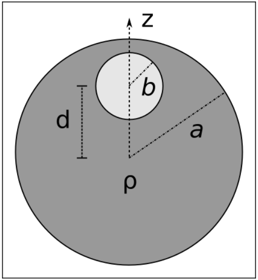
$$\vec{E}(x, 0, 0) = -\nabla V(x, y, z)|_{(x,0,0)}$$

y

$$\vec{E}(0, 0, z) = -\nabla V(x, y, z)|_{(0,0,z)}$$

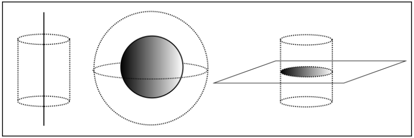
Enunciado:

Una esfera de radio a, cargada uniformemente con densidad ρ, posee un agujero esférico de radio $b < a$ en su interior. El centro del agujero está a una distancia $d < (a - b)$ del centro de la esfera (es decir, el hueco de radio b NO es concéntrico con la esfera de radio a). Obtenga el valor del campo eléctrico sobre el eje de simetría de la configuración. Verifique que en el centro del agujero el valor del campo es el mismo que habría si no se hubiera practicado el agujero.



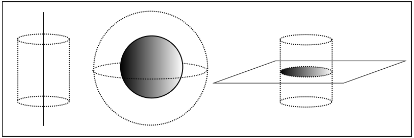
Guía 1 - Problema 13 - ¿ Ley de Gauss?

Algo que suele ser muy conveniente y práctico para resolver los problemas de electrostática es usar la ley de Gauss como se hizo en la clase anterior.



Guía 1 - Problema 13 - ¿ Ley de Gauss?

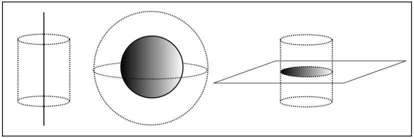
Algo que suele ser muy conveniente y práctico para resolver los problemas de electrostática es usar la ley de Gauss como se hizo en la clase anterior.



Sin embargo, en este problema **NO** lo es.

Guía 1 - Problema 13 - ¿ Ley de Gauss?

Algo que suele ser muy conveniente y práctico para resolver los problemas de electrostática es usar la ley de Gauss como se hizo en la clase anterior.



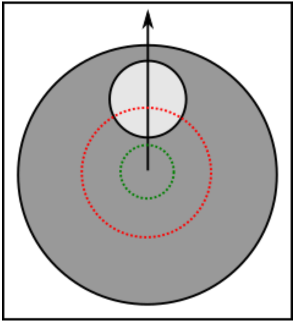
Sin embargo, en este problema **NO** lo es.

IMPORTANTE: La ley de Gauss vale siempre, pero no siempre es útil (como en este caso). Para que sea útil debemos tener una configuración de cargas cuya simetría nos permita inferir la dirección del campo sobre las superficies de Gauss que utilicemos.

En el *Problema 8* aprovechamos la simetría de los distintos casos para proponer superficies de Gauss adaptadas a dicha simetría sobre las cuales el campo eléctrico es perpendicular y constante. Siendo más precisos: esferas con esferas, cilindros con cilindros.

Guía 1 - Problema 13 - ¿ Ley de Gauss?

Si intentasemos utilizar la ley de Gauss, ¿en dirección debería apuntar el campo eléctrico sobre las superficies de color verde y rojo? ¿Cuál sería la dependencia del campo eléctrico con las coordenadas?

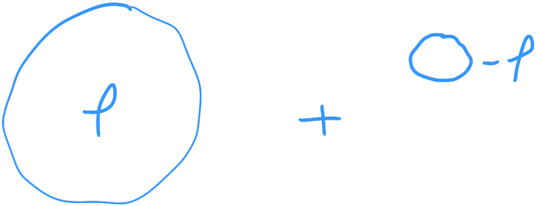


Debemos buscar otra manera de resolver el problema.

Guía 1 - Problema 13 - Superposición

Entonces, ¿cómo vamos a resolver este problema?

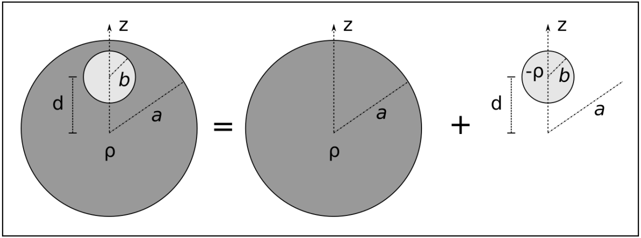
Otro de los principios fundamentales (y sumamente útiles) es el de **superposición**. Este principio nos permite obtener el campo eléctrico de una dada configuración sumando el campo eléctrico de cada una de sus partes.



Guía 1 - Problema 13 - Superposición

Entonces, ¿cómo vamos a resolver este problema?

Otro de los principios fundamentales (y sumamente útiles) es el de **superposición**. Este principio nos permite obtener el campo eléctrico de una dada configuración sumando el campo eléctrico de cada una de sus partes.



$$\vec{E}_{\text{(Esfera con hueco)}} = \vec{E}^{(1)}_{\text{(Esfera } r=a \text{ y } \rho>0)} + \vec{E}^{(2)}_{\text{(Esfera desplazada con } r=b \text{ y } \rho<0)}$$

Problema 13 - Resolución

Recordemos que en el *Problema (8.d)* obtuvimos el campo eléctrico de una esfera de radio r con densidad uniforme ρ

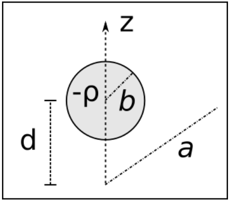
$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\epsilon_0} r\,\hat{r}\,, & r \leq R\,, \\ \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2}\,\hat{r}\,, & r > R\,. \end{cases} \tag{7}$$

Entonces, para hallar el campo de la esfera con hueco descentrado debemos obtener:

- $\vec{E}^{(1)}$: el campo de esfera de radio a con carga ρ, éste se obtiene reemplazando $R \to a$ en (7) ;
- $\vec{E}^{(2)}$: el campo de una esfera de radio b con carga $-\rho$ a una distancia d del origen, éste se obtiene a partir de (7) reemplazando $R \to b$, cambiando el signo de la densidad de carga $\rho \to -\rho$, y **desplazando la distribución de carga una distancia d en la dirección** $\hat{z}$.

Primero vamos a escribir el campo de la esfera de radio a con carga ρ en el eje z. Recordemos que si evaluamos $r\hat{r}$ en el eje z, obtenemos $z\hat{z}$:

$$\vec{E}(0,0,z) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} z\,\hat{z}\,, & z \leq a\,, \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{a^3}{|z|^2}\,\hat{z}\,, & z > a\,. \end{cases} \tag{8}$$

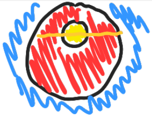


El campo eléctrico desplazado $\vec{E}^{(2)}$ se obtiene evaluando $z \to z - d$ en la ecuación (7). Más precisamente, el "nuevo" campo eléctrico será el "viejo" $\vec{E}(\vec{r} = z\hat{z})$ evaluado en $z \to z - d$. Esto es lo mismo que ver el campo eléctrico generado por una esfera con densidad de carga ρ desde un punto desplazado del origen una distancia d en la dirección $\hat{z}$.

Entonces, haciendo también los reemplazos $\rho \to -\rho$ y $R \to b$ el campo $\vec{E}^{(2)}$ nos queda:

$$\vec{E}^{(2)}_{\text{sobre el eje } z} = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{3\epsilon_0}(z-d)\hat{z}\,, & |z-d| \leq b\,, \\ -\dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\dfrac{b^3}{|z-d|^2}\,\hat{z}\,, & |z-d| > b\,. \end{cases} \qquad (9)$$

$z = d + b$ // $z = d - b$



Sumando las distinas contribuciones

$$\vec{E}_{(\text{Esfera con hueco})} = \vec{E}^{(1)}_{(\text{Esfera } r=a \text{ y } \rho>0)} + \vec{E}^{(2)}_{(\text{Esfera desplazada con } r=b \text{ y } \rho<0)}\,,$$

se obtiene

$$\vec{E}(0,0,z) = \begin{cases} \left[\dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\dfrac{a^3}{|z|^2} - \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\dfrac{b^3}{|z-d|^2}\right]\hat{z}\,, & |z|>a\,, |z-d|>b\,, \\ \left[\dfrac{\rho}{3\epsilon_0}z - \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\dfrac{b^3}{|z-d|^2}\right]\hat{z}\,, & |z|\leq a\,, |z-d|>b\,, \\ \left[\dfrac{\rho}{3\epsilon_0}z - \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}(z-d)\right]\hat{z} = \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}d\hat{z}\,, & |z|\leq a\,, |z-d|\leq b\,. \end{cases} \tag{10}$$

Debemos notar que el campo dentro del hueco toma exactamente el mismo valor que si el hueco no existiese. ¿Es curioso, no?

Sumando las distinas contribuciones

$$\vec{E}_{(\text{Esfera con hueco})} = \vec{E}^{(1)}_{(\text{Esfera } r=a \text{ y } \rho>0)} + \vec{E}^{(2)}_{(\text{Esfera desplazada con } r=b \text{ y } \rho<0)}\,,$$

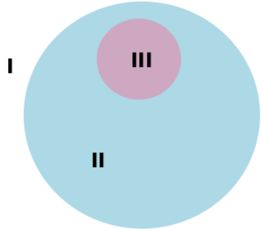
se obtiene

$$\vec{E}(0,0,z) = \begin{cases} \left[\dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\dfrac{a^3}{|z|^2} - \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\dfrac{b^3}{|z-d|^2}\right]\hat{z}\,, & |z|>a\,, |z-d|>b\,, \\ \left[\dfrac{\rho}{3\epsilon_0}z - \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\dfrac{b^3}{|z-d|^2}\right]\hat{z}\,, & |z|\leq a\,, |z-d|>b\,, \\ \left[\dfrac{\rho}{3\epsilon_0}z - \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}(z-d)\right]\hat{z} = \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}d\hat{z}\,, & |z|\leq a\,, |z-d|\leq b\,. \end{cases} \tag{10}$$

Debemos notar que el campo dentro del hueco toma exactamente el mismo valor que si el hueco no existiese. ¿Es curioso, no?
Las contribuciones al campo de la esfera con hueco descentrado se cancelan en su centro.

Para finalizar la resolución del problema notemos que la configuración de la esfera con hueco tiene tres zonas diferentes según estemos dentro o fuera de la esfera y del hueco, a saber

- zona I, fuera de la esfera $|z| > a$ y $|z - d| > b$;
- zona II, dentro de la esfera y fuera del hueco $|z| \leq a$ y $|z - d| > b$;
- zona III, dentro del hueco $|z| \leq a$ y $|z - d| \leq b$.



Noten que podríamos haber obtenido el campo en cualquier punto de la esfera, sabiendo que el campo eléctrico de una esfera desplazada del origen en un vector $\vec{d} = d\hat{z}$ y cargada con $-\rho$ es:

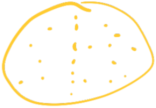
$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r}-\vec{d}), & |\vec{r}-\vec{d}| \leq b, \\ -\dfrac{\rho b^3}{3\epsilon_0}\dfrac{(\vec{r}-\vec{d})}{|(\vec{r}-\vec{d})|^3}, & |\vec{r}-\vec{d}| > b. \end{cases} \tag{11}$$

d.cosθ

Recordemos la expresión del campo de la esfera de radio a en todo el espacio:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\epsilon_0} r\,\hat{r}, & r \leq R\,\ a \\ \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\dfrac{a^3}{r^2}\,\hat{r}, & r > R\, = a \end{cases} \tag{12}$$

Dentro de la esfera desplazada (radio b) el campo total es:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r}-\vec{d}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} d\hat{z} \tag{13}$$

Problema 13

Haciendo superposición obtendríamos (cualitativamente) las siguientes lineas de campo