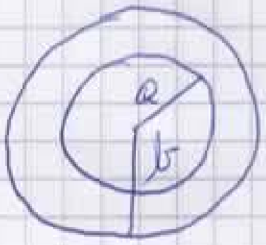
① .

HOJA Nº

FECHA

Problema 26



$$\vec{P} = \frac{\alpha}{r}\hat{r}$$

Este problema se puede resolver de dos maneras distintas:

Resolución 1

$$\vec{\nabla}\times\vec{P} = \left[\frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\left[\frac{\delta}{\delta\theta}(\text{sen}\,\theta\, P_\varphi) - \frac{\delta P_\theta}{\delta\varphi}\right]\right]\hat{r}$$

$$+ \left[\frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\delta P_r}{\delta\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}(r P_\varphi)\right]\hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\delta}{\delta r}(r P_\theta) - \frac{\delta P_r}{\delta\theta}\right]\hat{\varphi} = 0$$

Veamos ahora las fuentes de $\vec{\nabla}\times\vec{D}$ en superficie

$r = a$

$$\vec{P}\times\hat{n} = \frac{\alpha}{a}\hat{r}\times(-\hat{r}) = 0$$

$r = b$

$$\vec{P}\times\hat{n} = \frac{\alpha}{b}\hat{r}\times\hat{r} = 0.$$

NOTA

②.

HOJA Nº

FECHA

Como no hay cargas libres, las ecuaciones para $\vec{D}$ son:

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$\Rightarrow \vec{D} = 0$ en todo el espacio

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{\varepsilon_0 r}\,\hat{r} & a < r < b \\ 0 & \text{en el resto del espacio} \end{cases}$$

Resolución 2

No hay cargas libres y puedo calcular las cargas de polarización:

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\text{sen}\theta\, A_\theta)$$

$$+ \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\alpha}{r}\right) = -\frac{\alpha}{r^2}$$

NOTA

HOJA Nº

FECHA

(3)

$r = a$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{\alpha}{a} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{\alpha}{a}$$

$r = b$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{\alpha}{b} \hat{r} \cdot (\hat{r}) = \frac{\alpha}{b}$$

Las cargas de polarización son $\rho_p = -\frac{\alpha}{r^2}$

y $\sigma_{p_1} = -\frac{\alpha}{a}$ en $r = a$

$\sigma_{p_2} = \frac{\alpha}{b}$ en $r = b$

Tengo que calcular el campo eléctrico de esta distribución de cargas ρ_p y σ_{p_1} y σ_{p_2}

Como el problema tiene simetría esférica $\Rightarrow$ ya que $\rho_p = \rho(r)$ y $\sigma_{p_{1,2}} = cte \rightarrow \vec{E} = E(r)\hat{r}$

puedo usar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico. Para cualquier r vale que:

$$\oint\!\!\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r}\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$= 4\pi r^2 E(r)$$

$r < a$ $\qquad Q_{enc} = 0$

NOTA

④.

HOJA Nº

FECHA

$a < r < b$

$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{r} -\frac{\alpha}{r^2}\, r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, dr \, d\varphi$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\frac{\alpha}{a}\, a^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 4\pi \left[-\alpha (r-a)\right] - 4\pi\alpha a = -4\pi\alpha r$$

$r > b$

$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{b} -\frac{\alpha}{r^2}\, r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\frac{\alpha}{a}\, a^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\alpha}{b}\, b^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= -4\pi\alpha (b-a) - 4\pi\alpha a + 4\pi\alpha b = 0$$

$$\Longrightarrow \vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{\varepsilon_0 r}\,\hat{r} & a < r < b \\ 0 & \text{en el resto del espacio.} \end{cases}$$

NOTA $\vec{D} = 0$ en todo el espacio