

CLASE 10: MEDIOS DIELECTRICOS

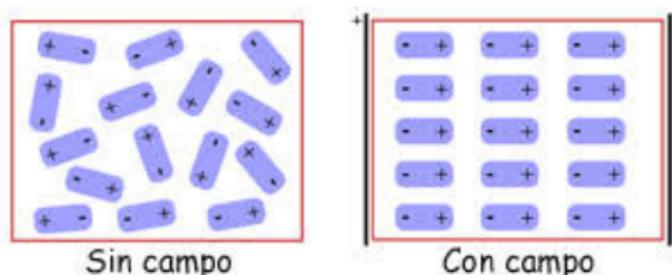


universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

20 de septiembre de 2021

MEDIOS DIELECTRICOS

Un material dieléctrico ideal es aquel que no tiene cargas libres.



Ante la presencia de un campo eléctrico externo, las cargas positivas se alinean en la dirección del campo y las cargas negativas se alinean en dirección opuesta al mismo. Para describir la polarización se utiliza el vector de polarización \vec{P} . Cuando el medio dieléctrico es lineal:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi(E) \vec{E} \quad (1)$$

donde χ se denomina susceptibilidad eléctrica.

$$P_i = \sum_j \epsilon_0 \chi_{ij}(E) E_j \quad (2)$$

MEDIOS DIELECTRICOS

En presencia de campos eléctricos externos, en los materiales dieléctricos, se van a generar cargas de polarización que se definen de la siguiente manera:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \qquad \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \qquad (3)$$

MEDIOS DIELECTRICOS

En presencia de campos eléctricos externos, en los materiales dieléctricos, se van a generar cargas de polarización que se definen de la siguiente manera:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (3)$$

Una herramienta matemática útil es el vector desplazamiento eléctrico:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4)$$

MEDIOS DIELECTRICOS

En presencia de campos eléctricos externos, en los materiales dieléctricos, se van a generar cargas de polarización que se definen de la siguiente manera:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (3)$$

Una herramienta matemática útil es el vector desplazamiento eléctrico:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4)$$

Recordando que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ se cumple la siguiente ecuación para \vec{D} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P} \quad (5)$$

MEDIOS DIELECTRICOS

En presencia de campos eléctricos externos, en los materiales dieléctricos, se van a generar cargas de polarización que se definen de la siguiente manera:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (3)$$

Una herramienta matemática útil es el vector desplazamiento eléctrico:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4)$$

Recordando que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ se cumple la siguiente ecuación para \vec{D} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P} \quad (5)$$

A su vez:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (6)$$

MEDIOS DIELECTRICOS

En presencia de campos eléctricos externos, en los materiales dieléctricos, se van a generar cargas de polarización que se definen de la siguiente manera:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (3)$$

Una herramienta matemática útil es el vector desplazamiento eléctrico:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4)$$

Recordando que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ se cumple la siguiente ecuación para \vec{D} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P} \quad (5)$$

A su vez:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (6)$$

Si recordamos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_T}{\epsilon_0} = \frac{\rho_L + \rho_P}{\epsilon_0}$, se cumple que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \left(\frac{\rho_L + \rho_P}{\epsilon_0} \right) - \rho_P = \rho_L \quad (7)$$

MEDIOS DIELECTRICOS

Por lo tanto, dado que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L \quad (8)$$

Se puede expresar la ley de Gauss en medios dieléctricos:

$$\int \int \vec{D} \cdot \hat{n} \, dS = Q_L \quad (9)$$

MEDIOS DIELECTRICOS

Las ecuaciones que cumple \vec{D} son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L \quad \vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P} \quad (10)$$

y las ecuaciones que cumple \vec{E} son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_T}{\epsilon_0} = \frac{\rho_L + \rho_P}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (11)$$

La siguiente tabla resume las fuentes de \vec{E} y \vec{D} en volumen y superficie:

	Volumen	Superficie
\vec{D}	$\rho_L \quad \vec{\nabla} \times \vec{P}$	$\sigma_L \quad \vec{P} \times \hat{n}$
\vec{E}	$\rho_T = \rho_L + \rho_P$	$\sigma_T = \sigma_L + \sigma_P$

donde $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ y $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$ y \hat{n} es la normal exterior al medio dieléctrico.

MEDIOS DIELECTRICOS

En medios lineales:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \epsilon_0 \chi(\vec{E}) \vec{E} \\ \vec{D} &= \epsilon(\vec{E}) \vec{E}\end{aligned}\tag{12}$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica.

MEDIOS DIELECTRICOS

En medios lineales:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \epsilon_0 \chi(\vec{E}) \vec{E} \\ \vec{D} &= \epsilon(\vec{E}) \vec{E}\end{aligned}\quad (12)$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica. En otra notación

$$P_i = \sum_j \epsilon_0 \chi_{ij}(\vec{E}) E_j \quad (13)$$

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij}(\vec{E}) E_j \quad (14)$$

donde ϵ_{ij} es la permitividad eléctrica. En el caso más general χ_{ij} y ϵ_{ij} son tensores que dependen del campo eléctrico.

MEDIOS DIELECTRICOS

Recordando que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y las ecuaciones 12:

$$\epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (15)$$

obtenemos

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) \quad (16)$$

MEDIOS DIELECTRICOS

Recordando que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y las ecuaciones 12:

$$\epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{P} = \epsilon \vec{E} \quad (15)$$

obtenemos

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) \quad (16)$$

Recordando que ϵ y χ son tensores:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 (\mathbb{1} + \chi_{ij}) \quad (17)$$

donde $\mathbb{1}$ es el tensor identidad.

MEDIOS DIELECTRICOS

Recordando que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y las ecuaciones 12:

$$\epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{P} = \epsilon \vec{E} \quad (15)$$

obtenemos

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) \quad (16)$$

Recordando que ϵ y χ son tensores:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 (\mathbb{1} + \chi_{ij}) \quad (17)$$

donde $\mathbb{1}$ es el tensor identidad. A su vez, si el medio es lineal e isótropo:

$$\chi_{ij}(E) = \chi(E) \mathbb{1} \quad \epsilon_{ij}(E) = \epsilon(E) \mathbb{1} \quad (18)$$

MEDIOS DIELECTRICOS

Recordando que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y las ecuaciones 12:

$$\epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{P} = \epsilon \vec{E} \quad (15)$$

obtenemos

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) \quad (16)$$

Recordando que ϵ y χ son tensores:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 (\mathbb{1} + \chi_{ij}) \quad (17)$$

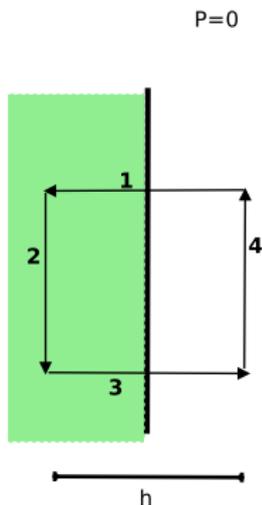
donde $\mathbb{1}$ es el tensor identidad. A su vez, si el medio es lineal e isótropo:

$$\chi_{ij}(E) = \chi(E) \mathbb{1} \quad \epsilon_{ij}(E) = \epsilon(E) \mathbb{1} \quad (18)$$

Si, además el medio es lineal, isótropo y homogéneo:

$$\chi = \text{cte} \quad \epsilon = \text{cte} \quad (19)$$

Veamos cuáles son las condiciones para que $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$ en superficies



$$\oiint \vec{\nabla} \times \vec{P} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{P} \cdot d\vec{l}$$

Tomando el límite $h \rightarrow 0$ solo contribuyen a la integral, los términos 2 y 4. Es decir:

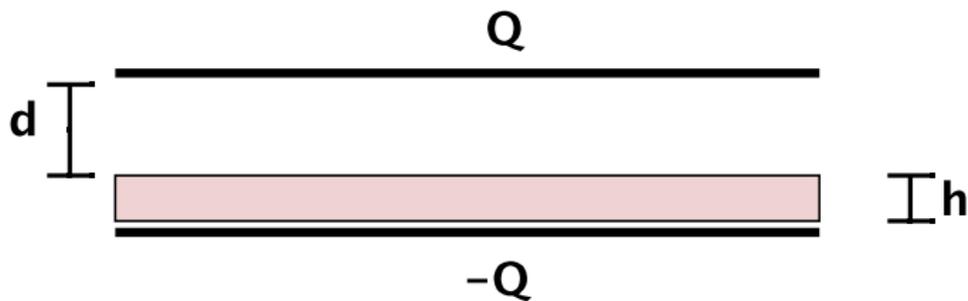
$$\begin{aligned} \oiint \vec{\nabla} \times \vec{P} \cdot d\vec{S} &= P_{//}^{\text{af}} - P_{//}^{\text{ad}} \\ &= -P_{//}^{\text{ad}} \end{aligned} \quad (20)$$

donde $P_{//}^{\text{af}}$ es la componente perpendicular a la superficie de P afuera del dieléctrico mientras que $P_{//}^{\text{ad}}$ refiere a la componente perpendicular a la superficie de P adentro del dieléctrico. Finalmente podemos escribir:

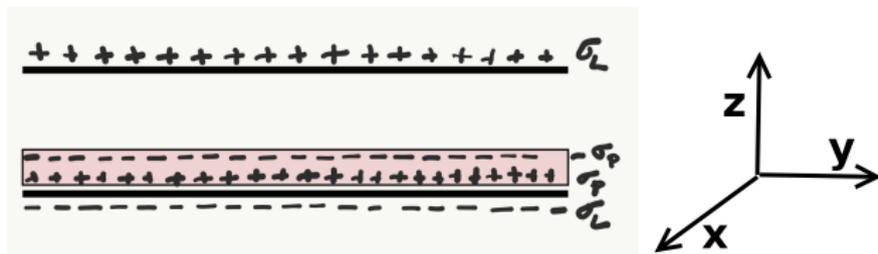
$$\oiint \vec{\nabla} \times \vec{P} \cdot d\vec{S} = -P_{//}^{\text{ad}} = \vec{P} \times \hat{n}$$

donde \hat{n} es la normal exterior al dieléctrico.

PROBLEMA 19



PROBLEMA 19



Como el medio es **lineal, isótropo y homogéneo**, podemos escribir:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (21)$$

donde en este caso especial χ es una constante, Entonces, ocurre que $\vec{\nabla} \times \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Entonces, las ecuaciones para \vec{D} son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L \quad (22)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0 \quad (23)$$

son las mismas ecuaciones que tendríamos para el campo eléctrico para un capacitor cargado con Q_L .

PROBLEMA 19

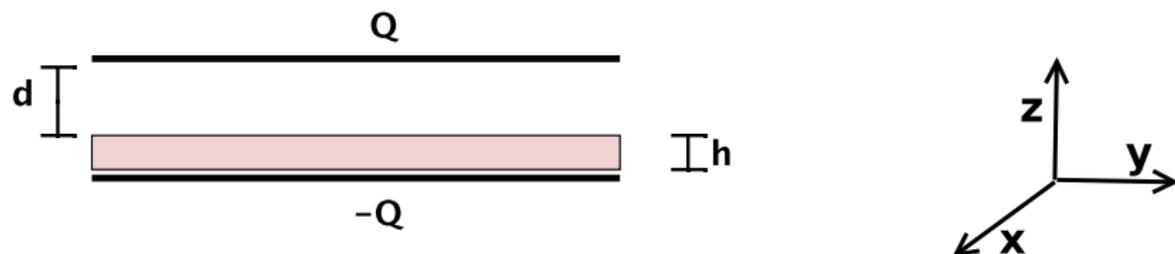
Entonces podemos usar la ley de Gauss para encontrar \vec{D} :

$$\int \int \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_L \quad (24)$$

De esta manera (ver ley de Gauss clase 2) obtenemos la expresión para \vec{D} de un plano conductor infinito cargado con σ_L :

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma_L}{2} \hat{z} & z > 0 \\ -\frac{\sigma_L}{2} \hat{z} & z < 0. \end{cases}$$

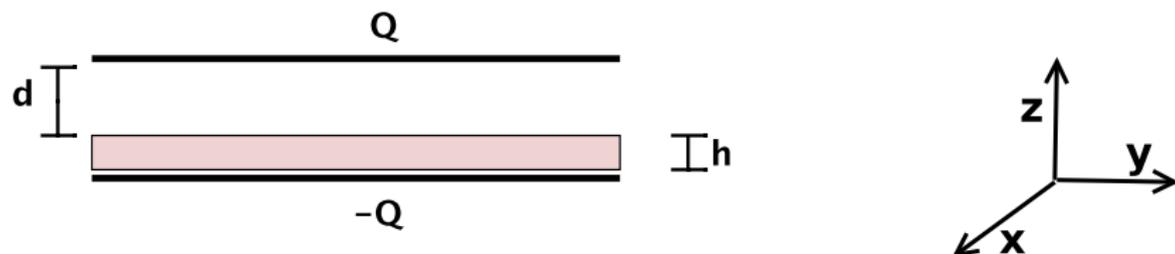
PROBLEMA 19



Aplicando el principio de superposición, encontramos el campo \vec{D} para dos planos conductores infinitos cargados con σ_L y $-\sigma_L$ y ubicados a una distancia $d + h$:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} -\sigma_L \hat{z} & 0 < z < d + h \\ 0 & z < 0 \text{ o } z > d + h. \end{cases}$$

PROBLEMA 19



Como el medio el lineal, isótropo y homogéneo $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y entonces:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma_L}{\epsilon} \hat{z} & 0 < z < h \\ -\frac{\sigma_L}{\epsilon_0} \hat{z} & h < z < h + d \\ 0 & z < 0 \text{ o } z > d + h. \end{cases}$$

PROBLEMA 19

Ahora podemos calcular $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -\sigma_L \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z} & 0 < z < h \\ 0 & z < 0 \text{ o } z > h. \end{cases}$$

Y las cargas de polarización,

- $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$.
- $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$ donde \hat{n} son las normales a las dos superficies del dieléctrico.

Entonces, tenemos dos cargas de polarización, una ubicada en $z = 0$

$$\sigma_p = -\sigma_L \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z} \cdot (-\hat{z}) = \sigma_L \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$$

y la otra en $z = h$:

$$\sigma_p = -\sigma_L \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z} \cdot \hat{z} = -\sigma_L \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$$

PROBLEMA 19

A continuación calculamos la capacidad $C = \frac{Q_L}{\Delta V}$, para eso, primera calculamos :

$$\Delta V = - \int_0^{d+h} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^h \frac{\sigma_L}{\epsilon} \hat{z} \cdot \hat{z} dz + \int_h^{h+d} \frac{\sigma_L}{\epsilon_0} \hat{z} \cdot \hat{z} dz$$

PROBLEMA 19

A continuación calculamos la capacidad $C = \frac{Q_L}{\Delta V}$, para eso, primera calculamos :

$$\begin{aligned}\Delta V &= - \int_0^{d+h} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^h \frac{\sigma_L}{\epsilon} \hat{z} \cdot \hat{z} dz + \int_h^{h+d} \frac{\sigma_L}{\epsilon_0} \hat{z} \cdot \hat{z} dz \\ &= \frac{\sigma_L}{\epsilon} h + \frac{\sigma_L}{\epsilon_0} d = \sigma_L \left(\frac{h}{\epsilon} + \frac{d}{\epsilon_0} \right)\end{aligned}$$

PROBLEMA 19

A continuación calculamos la capacidad $C = \frac{Q_L}{\Delta V}$, para eso, primero calculamos :

$$\begin{aligned}\Delta V &= - \int_0^{d+h} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^h \frac{\sigma_L}{\epsilon} \hat{z} \cdot \hat{z} dz + \int_h^{h+d} \frac{\sigma_L}{\epsilon_0} \hat{z} \cdot \hat{z} dz \\ &= \frac{\sigma_L}{\epsilon} h + \frac{\sigma_L}{\epsilon_0} d = \sigma_L \left(\frac{h}{\epsilon} + \frac{d}{\epsilon_0} \right)\end{aligned}$$

Y de esta manera obtenemos:

$$C = \frac{Q_L}{\Delta V} = \frac{\sigma_L A}{\Delta V} = \frac{A}{\frac{h}{\epsilon} + \frac{d}{\epsilon_0}}$$

donde A es el área del capacitor. Recordemos que el problema plantea despreciar los efectos de borde para calcular los campos, pero se trata de capacitores finitos.

PROBLEMA 19

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

PROBLEMA 19

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_A (-\sigma_L \hat{z}) \cdot \left(-\frac{\sigma_L}{\epsilon} \hat{z}\right) dA \, dz + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_h^{h+d} \int_A (-\sigma_L \hat{z}) \cdot \left(-\frac{\sigma_L}{\epsilon_0} \hat{z}\right) dA \, dz \end{aligned}$$

PROBLEMA 19

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

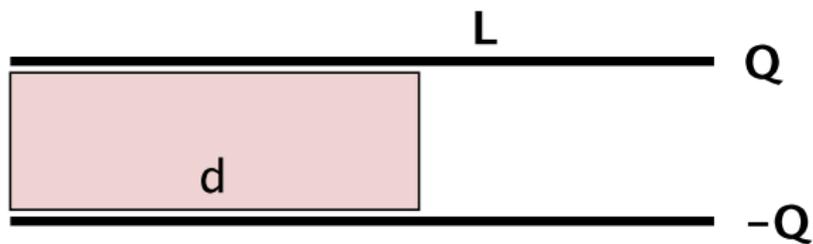
$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV \\&= \frac{1}{2} \int_0^h \int_A (-\sigma_L \hat{z}) \cdot \left(-\frac{\sigma_L}{\epsilon} \hat{z}\right) dA \, dz + \\&\quad \frac{1}{2} \int_h^{h+d} \int_A (-\sigma_L \hat{z}) \cdot \left(-\frac{\sigma_L}{\epsilon_0} \hat{z}\right) dA \, dz \\&= \frac{1}{2} \sigma_L^2 A \left(\frac{h}{\epsilon} + \frac{d}{\epsilon_0} \right)\end{aligned}$$

PROBLEMA 19

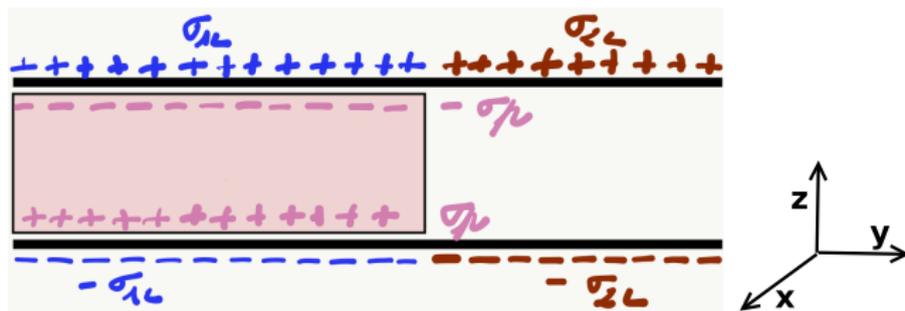
Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV \\&= \frac{1}{2} \int_0^h \int_A (-\sigma_L \hat{z}) \cdot \left(-\frac{\sigma_L}{\epsilon} \hat{z}\right) dA \, dz + \\&\quad \frac{1}{2} \int_h^{h+d} \int_A (-\sigma_L \hat{z}) \cdot \left(-\frac{\sigma_L}{\epsilon_0} \hat{z}\right) dA \, dz \\&= \frac{1}{2} \sigma_L^2 A \left(\frac{h}{\epsilon} + \frac{d}{\epsilon_0}\right) \\&= \frac{1}{2} \frac{Q_L^2}{C} = \frac{1}{2} Q_L \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2\end{aligned}$$

PROBLEMA 19



PROBLEMA 19

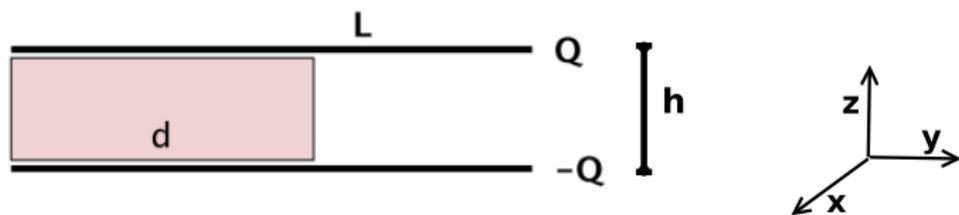


En este problema, las cargas se van a distribuir en la superficie del conductor de manera diferente según estén próximas o no al material dieléctrico. En este problema nuevamente tenemos un medio dieléctrico lineal isótropo y homogéneo y por tanto $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ y entonces $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_L\end{aligned}$$

Al igual que en el problema anterior, podemos usar los resultados que obtuvimos usando la ley de Gauss para el campo eléctrico:

PROBLEMA 19



$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} -\sigma_{1L} \hat{z} & 0 < z < h \quad y \quad 0 < y < d \\ -\sigma_{2L} \hat{z} & 0 < z < h \quad y \quad d < y < L \\ 0 & z < 0 \quad \text{o} \quad z > h. \end{cases}$$

No sabemos aún cuanto valen σ_{1L} y σ_{2L} . Como $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, obtenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma_{1L}}{\epsilon} \hat{z} & 0 < z < h \quad y \quad 0 < y < d \\ -\frac{\sigma_{2L}}{\epsilon_0} \hat{z} & 0 < z < h \quad y \quad d < y < L \\ 0 & z < 0 \quad \text{o} \quad z > h. \end{cases}$$

PROBLEMA 19

Ahora bien, sabemos que la diferencia de tensión (ΔV) entre ambas placas del capacitor, tiene que ser igual, si el camino para calcularla es el dieléctrico o el vacío, es decir:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2$$

PROBLEMA 19

Ahora bien, sabemos que la diferencia de tensión (ΔV) entre ambas placas del capacitor, tiene que ser igual, si el camino para calcularla es el dieléctrico o el vacío, es decir:

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= \Delta V_2 \\ \int_0^h \frac{\sigma_{1L}}{\epsilon} dz &= \int_0^h \frac{\sigma_{2L}}{\epsilon_0} dz\end{aligned}$$

PROBLEMA 19

Ahora bien, sabemos que la diferencia de tensión (ΔV) entre ambas placas del capacitor, tiene que ser igual, si el camino para calcularla es el dieléctrico o el vacío, es decir:

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= \Delta V_2 \\ \int_0^h \frac{\sigma_{1L}}{\epsilon} dz &= \int_0^h \frac{\sigma_{2L}}{\epsilon_0} dz \\ \sigma_{1L} &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \sigma_{2L}\end{aligned}$$

PROBLEMA 19

Ahora bien, sabemos que la diferencia de tensión (ΔV) entre ambas placas del capacitor, tiene que ser igual, si el camino para calcularla es el dieléctrico o el vacío, es decir:

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= \Delta V_2 \\ \int_0^h \frac{\sigma_{1L}}{\epsilon} dz &= \int_0^h \frac{\sigma_{2L}}{\epsilon_0} dz \\ \sigma_{1L} &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \sigma_{2L}\end{aligned}$$

A su vez, conocemos el valor de $Q_L = \sigma_L A = \sigma_L L L'$ donde A es el área de cada una de las placas del capacitor.

$$\sigma_L = \frac{\sigma_{1L}d + \sigma_{2L}(L - d)}{L}$$

PROBLEMA 19

Ahora bien, sabemos que la diferencia de tensión (ΔV) entre ambas placas del capacitor, tiene que ser igual, si el camino para calcularla es el dieléctrico o el vacío, es decir:

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= \Delta V_2 \\ \int_0^h \frac{\sigma_{1L}}{\epsilon} dz &= \int_0^h \frac{\sigma_{2L}}{\epsilon_0} dz \\ \sigma_{1L} &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \sigma_{2L}\end{aligned}$$

A su vez, conocemos el valor de $Q_L = \sigma_L A = \sigma_L L L'$ donde A es el área de cada una de las placas del capacitor.

$$\begin{aligned}\sigma_L &= \frac{\sigma_{1L}d + \sigma_{2L}(L - d)}{L} \\ &= \frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \sigma_{2L}d + \sigma_{2L}(L - d)}{L}\end{aligned}$$

PROBLEMA 19

De esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned}\sigma_{2L} &= \frac{\sigma_L L \epsilon_0}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \\ \sigma_{1L} &= \frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)}\end{aligned}$$

Y de esta manera podemos escribir la expresión final para \vec{D} , \vec{E} y \vec{P} :

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} & 0 < z < h \quad y \quad 0 < y < d \\ -\frac{\sigma_L L \epsilon_0}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} & 0 < z < h \quad y \quad d < y < L \\ 0 & z < 0 \quad o \quad z > h. \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} & 0 < z < h \\ 0 & z < 0 \quad o \quad z > h. \end{cases}$$

PROBLEMA 19

Y ahora calculamos $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z} & 0 < z < h \text{ y } 0 < y < d \\ 0 & z < 0 \text{ o } z > h \text{ o } 0 < z < h \text{ y } d < y < L \end{cases}$$

A su vez, podemos calcular las cargas de polarización: $\rho_p = \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$ y $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$. Para $z = 0$ y $0 < y < d$:

$$\sigma_p = -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z} \cdot (-\hat{z}) = \frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$$

y para $z = h$ y $0 < y < d$:

$$\sigma_p = -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z} \cdot \hat{z} = -\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$$

PROBLEMA 19

Vamos a calcular ahora la capacidad $C = \frac{Q_L}{\Delta V}$; entonces primero calculamos:

$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^h \frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0(L - d)} \hat{z} \cdot \hat{z} dz$$

PROBLEMA 19

Vamos a calcular ahora la capacidad $C = \frac{Q_L}{\Delta V}$; entonces primero calculamos:

$$\begin{aligned}\Delta V &= - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^h \frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0(L - d)} \hat{z} \cdot \hat{z} dz \\ &= \frac{\sigma_L L h}{\epsilon d + \epsilon_0(L - d)}\end{aligned}$$

PROBLEMA 19

Vamos a calcular ahora la capacidad $C = \frac{Q_L}{\Delta V}$; entonces primero calculamos:

$$\begin{aligned}\Delta V &= - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^h \frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0(L - d)} \hat{z} \cdot \hat{z} dz \\ &= \frac{\sigma_L L h}{\epsilon d + \epsilon_0(L - d)}\end{aligned}$$

Y ahora si podemos obtener la capacidad:

$$C = \frac{Q_L}{\Delta V} = \frac{\sigma_L A}{h \sigma_L L} [\epsilon d + \epsilon_0(L - d)] = \frac{A}{hL} [\epsilon d + \epsilon_0(L - d)]$$

PROBLEMA 19

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

PROBLEMA 19

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^d \int_0^{L'} \left(-\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} \right) \cdot \left(-\frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

PROBLEMA 19

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^d \int_0^{L'} \left(-\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} \right) \cdot \left(-\frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} \right) dx dy dz \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^h \int_d^L \int_0^{L'} \left(-\frac{\sigma_L L \epsilon_0}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} \right) \cdot \left(-\frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

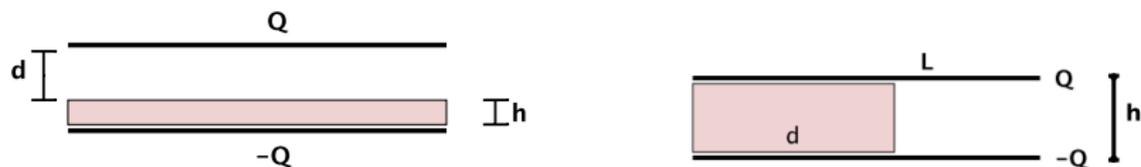
PROBLEMA 19

Finalmente vamos a calcular la energía electrostática de la configuración:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV \\&= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^d \int_0^{L'} \left(-\frac{\sigma_L L \epsilon}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} \right) \cdot \left(-\frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} \right) dx dy dz \\&\quad + \frac{1}{2} \int_0^h \int_d^L \int_0^{L'} \left(-\frac{\sigma_L L \epsilon_0}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} \right) \cdot \left(-\frac{\sigma_L L}{\epsilon d + \epsilon_0(L-d)} \hat{z} \right) dx dy dz \\&= \frac{1}{2} \frac{\sigma_L^2 L^2 \epsilon L' h d}{[\epsilon d + \epsilon_0(L-d)]^2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_L^2 L^2 \epsilon_0 L' h (L-d)}{[\epsilon d + \epsilon_0(L-d)]^2}\end{aligned}$$

PROBLEMA 19

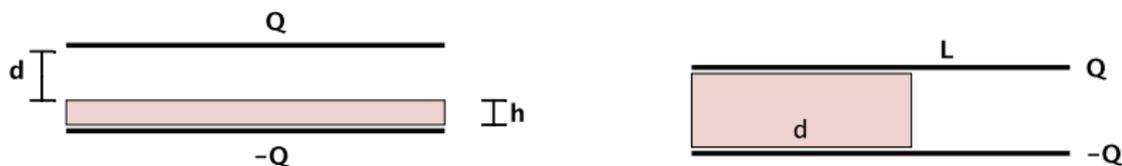
Por último una observación:



Si miramos con atención podemos ver que en el caso del capacitor de la izquierda, lo podemos pensar como dos capacitores en serie, uno que se encuentra en $0 < z < h$ y otro que se encuentra en $h < z < d + h$. Mientras que si miramos con atención el circuito de la derecha, lo podemos pensar como dos capacitores en paralelo, uno se encuentra en $0 < y < d$ y el otro $d < y < L$.

PROBLEMA 19

Por último una observación:



Recordemos la capacidad para ambos capacitores: para el capacitor de la izquierda

$$C = \frac{A}{\frac{h}{\epsilon} + \frac{d}{\epsilon_0}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

y para el capacitor de la derecha

$$C = \frac{A}{hL} [\epsilon d + \epsilon_0(L - d)] = C_1 + C_2$$

MEDIOS DIELECTRICOS

Las ecuaciones que cumple \vec{D} son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L \quad \vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P} \quad (27)$$

y las ecuaciones que cumple \vec{E} son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_T = \rho_L + \rho_P \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (28)$$

La siguiente tabla resume las fuentes de \vec{E} y \vec{D} en volumen y superficie:

	Volumen	Superficie
\vec{D}	$\rho_L \quad \vec{\nabla} \times \vec{P}$	$\sigma_L \quad \vec{P} \times \hat{n}$
\vec{E}	$\rho_T = \rho_L + \rho_P$	$\sigma_T = \sigma_L + \sigma_P$

donde $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ y $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$ y \hat{n} es la normal exterior al medio dieléctrico.