Clase 12: Corriente continua (continuación)

30 de septiembre de 2021

Para resolver los circuitos de corriente continua siempre se utiliza el hecho de que **la sumatoria de las caídas de tensión a lo largo de una malla es igual a 0**. A su vez, podemos distinguir dos métodos:

- Método 1: Utiliza las corrientes de rama y plantea las caídas de tensión usando corrientes de rama. Ademas se utiliza:
    - Ley de Kirchoff: En cada nodo del circuito

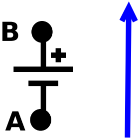
$$\sum_{\text{Corrientes entrantes}_\text{i}} I_i = \sum_{\text{Corrientes salientes}_\text{j}} I_j$$

- Método 2: Utiliza las corrientes de malla y plantea las caídas de tensión usando las corrientes de malla.

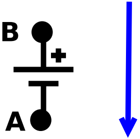
Ambos métodos sirven para calcular las corrientes y se pueden usar indistintamente. Vamos a ver como se aplica al problema 6 ambos métodos.

ΔV EN BATERÍAS

La batería tiene 12 Volt



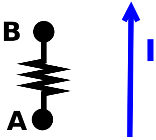
- Si el sentido del recorrido es del polo negativo al polo positivo de la batería, hay una subida de tensión : $V_B - V_A = 12\mathrm{V}$



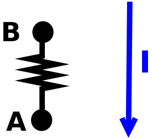
- Si el sentido del recorrido es del polo positivo al polo negativo de la batería, hay una bajada de tensión : $V_A - V_B = -12\mathrm{V}$

ΔV EN RESISTENCIAS

Veamos la caída de tensión en una resistencia:

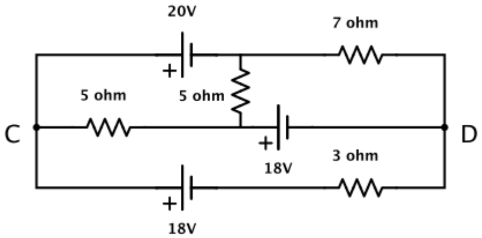


- Si
  recorro la malla en el mismo sentido que la corriente: $V_B - V_A = -IR$
- Si
  recorro la malla en el sentido opuesto al de la corriente : $V_B - V_A = IR$



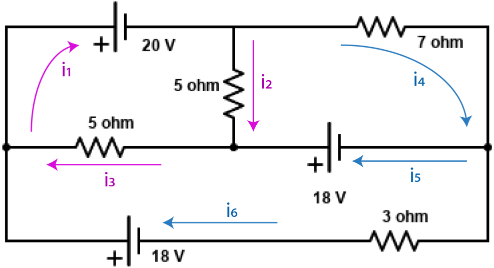
Problema 6

Dado el siguiente circuito, calcular:



1. Las corrientes en los bornes de las fuentes de tensión de 18 V y 20 V.
2. La diferencia de potencial entre C y D.
3. La potencia disipada por la resistencia de $5\,\Omega$ (entre C y la fuente de 18 V).
4. Se coloca un amperímetro en serie con la batería de 20 V. ¿Qué corriente mide si la resistencia del amperímetro es $R_a = 1\,\Omega$?
5. Repita el punto anterior pero ahora considerando que el amperímetro está en serie con la resistencia de $3\,\Omega$.

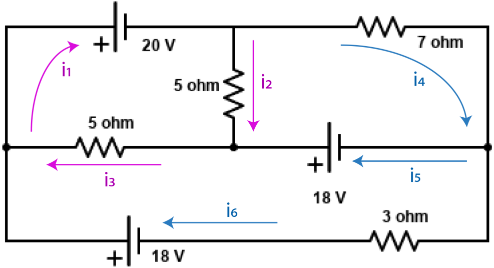
Resolución utilizando método de corrientes de rama:



Para la primera malla, recorriendo en sentido horario:

$$-20\mathrm{V} - i_2\,5\Omega - i_3\,5\Omega = 0$$

Resolución utilizando método de corrientes de rama:



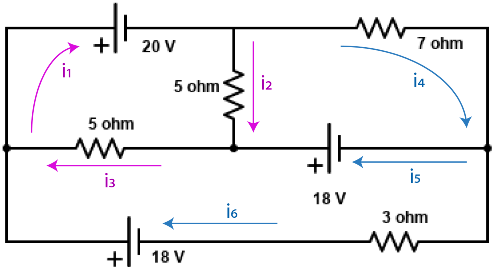
Para la primera malla, recorriendo en sentido horario:

$$-20\text{V} - i_2\,5\Omega - i_3\,5\Omega = 0$$

Para la segunda malla, recorriendo en sentido horario:

$$-(-i_2)\,5\Omega - i_4\,7\Omega + 18V = 0$$

Resolución utilizando método de corrientes de rama:



Para la primera malla, recorriendo en sentido horario:

$$-20\text{V} - i_2\, 5\Omega - i_3\, 5\Omega = 0$$

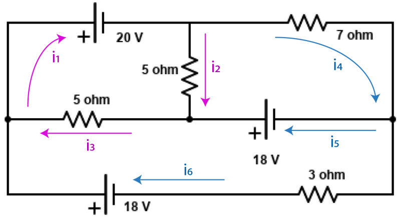
Para la segunda malla, recorriendo en sentido horario:

$$-(-i_2)\, 5\Omega - i_4\, 7\Omega + 18V = 0$$

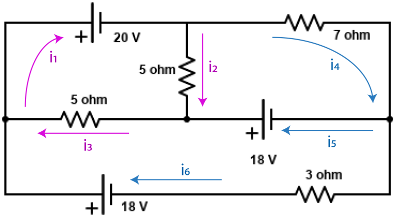
Para la tercera malla, recorriendo en sentido horario:

$$-(-i_3)\, 5\Omega - 18V - i_6\, 3\Omega + 18V = 0$$

Problema 6



Problema 6

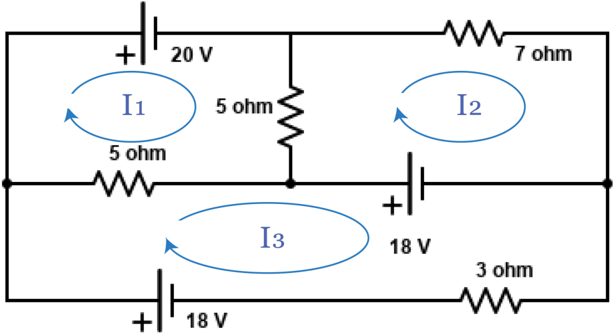


No es posible resolver el sistema de la filmina anterior porque tenemos 3 ecuaciones y 4 incógnitas (i_2, i_3, i_4, i_6). Por la ley de Kirchoff sabemos que:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_4 \\ i_2 + i_5 &= i_3 \\ i_3 + i_6 &= i_1 \\ i_4 &= i_5 + i_6 \end{aligned}$$

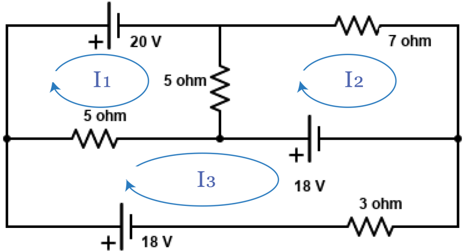
Ahora tengo 7 ecuaciones y 6 incógnitas y voy a poder resolver el sistema.

Resolución usando corrientes de malla



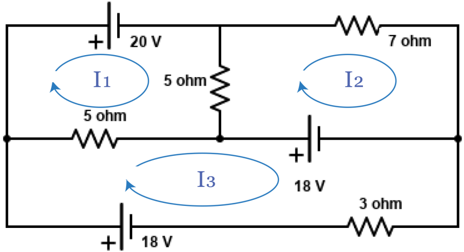
Primero voy a escribir las corrientes de rama (i_i) en función de las corrientes de malla (I_i):

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1 \\ i_2 &= I_1 - I_2 \\ i_3 &= I_1 - I_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i_4 &= I_2 \\ i_5 &= I_2 - I_3 \\ i_6 &= I_3 \end{aligned}$$



Ahora voy a escribir las caídas de tensión en cada malla en función de las corrientes de malla que no son corrientes verdaderas pero son herramientas útiles para resolver los circuitos. Para la primera malla, puedo escribir:

$$-20\mathrm{V} - (I_1 - I_2)\,5\Omega - (I_1 - I_3)\,5\Omega = 0$$

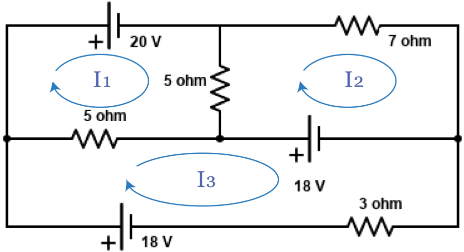


Ahora voy a escribir las caídas de tensión en cada malla en función de las corrientes de malla que no son corrientes verdaderas pero son herramientas útiles para resolver los circuitos. Para la primera malla, puedo escribir:

$$-20\mathrm{V} - (I_1 - I_2)\,5\Omega - (I_1 - I_3)\,5\Omega = 0$$

Para la segunda malla recorriendo siempre en sentido horario:

$$-(I_2 - I_1)\,5\Omega - I_2\,7\Omega + 18V = 0$$



Ahora voy a escribir las caídas de tensión en cada malla en función de las corrientes de malla que no son corrientes verdaderas pero son herramientas útiles para resolver los circuitos. Para la primera malla, puedo escribir:

$$-20\mathrm{V} - (I_1 - I_2)\,5\Omega - (I_1 - I_3)\,5\Omega = 0$$

Para la segunda malla recorriendo siempre en sentido horario:

$$-(I_2 - I_1)\,5\Omega - I_2\,7\Omega + 18V = 0$$

Para la tercera malla puedo escribir:

$$-(I_3 - I_1)\,5\Omega - 18V - I_3\,3\Omega + 18V = 0$$

Problema 6

De esta manera, tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Ordenando un poco las cuentas obtenemos:

$$\begin{aligned} 20V &= -10\Omega\, I_1 + 5\Omega\, I_2 + 5\Omega\, I_3 \\ 18V &= -5\Omega\, I_1 + 12\Omega\, I_2 \\ 0 &= 5\Omega\, I_1 - 8\Omega\, I_3 \end{aligned}$$

Problema 6

De esta manera, tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Ordenando un poco las cuentas obtenemos:

$$\begin{aligned} 20V &= -10\Omega\, I_1 + 5\Omega\, I_2 + 5\Omega\, I_3 \\ 18V &= -5\Omega\, I_1 + 12\Omega\, I_2 \\ 0 &= 5\Omega\, I_1 - 8\Omega\, I_3 \end{aligned}$$

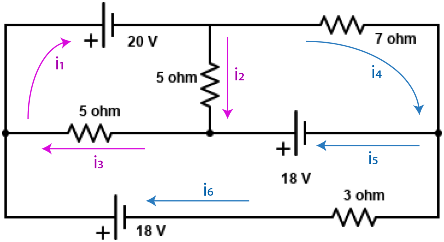
De esta manera obtenemos las corrientes de malla:

$$I_1 = -\frac{60}{23}\,\mathrm{A} \qquad I_2 = \frac{19}{46}\,\mathrm{A} \qquad I_3 = -\frac{75}{46}\,\mathrm{A}$$

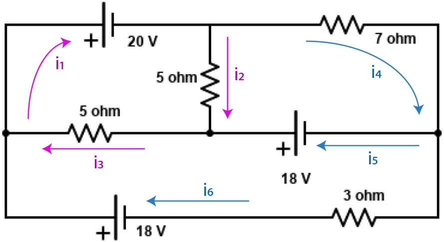
y las corrientes de rama:

$$i_1 = -\frac{60}{23}\,\mathrm{A} \qquad i_2 = -\frac{139}{46}\,\mathrm{A} \qquad i_3 = -\frac{45}{46}\,\mathrm{A}$$

$$i_4 = \frac{19}{46}\,\mathrm{A} \qquad i_5 = \frac{47}{23}\,\mathrm{A} \qquad i_6 = -\frac{75}{46}\,\mathrm{A}$$



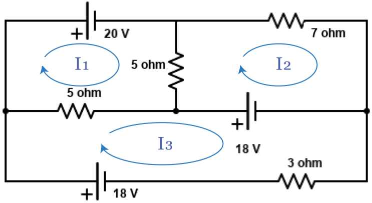
$$\Delta V_{CD} = V_C - V_D = 18\mathrm{V} - i_3\,5\Omega = \frac{1053}{46}\mathrm{V}$$



$$\Delta V_{CD} = V_C - V_D = 18\mathrm{V} - i_3\, 5\Omega = \frac{1053}{46}\mathrm{V}$$

Por otra parte la potencia disipada en la resistencia de 5Ω (entre C y la fuente de 18 V) es:

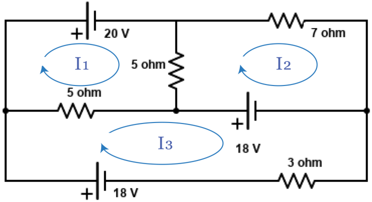
$$P = i_3^2\, 5\Omega = 4{,}78\,\mathrm{Watt}$$



Si se coloca un amperímetro en serie con la batería de $20V$ y la resistencia del mismo es 1Ω, la ecuaciones serán:

$$\begin{aligned} -20V - 1\Omega\, I_1 - (I_1 - I_2)\, 5\Omega - (I_1 - I_3)\, 5\Omega &= 0 \\ -(I_2 - I_1)\, 5\Omega - I_2\, 7\Omega + 18V &= 0 \\ -(I_3 - I_1)\, 5\Omega - 18V - I_3\, 3\Omega + 18V &= 0 \end{aligned}$$

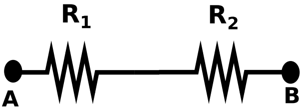
Problema 6



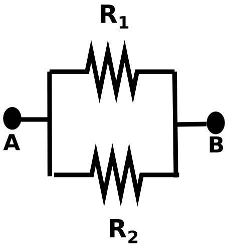
Si el amperímetro está en serie con la resistencia de 3Ω, la ecuaciones serán:

$$
\begin{aligned}
-20V - (I_1 - I_2)\,5\Omega - (I_1 - I_3)\,5\Omega &= 0 \\
-(I_2 - I_1)\,5\Omega - I_2\,7\Omega + 18V &= 0 \\
-(I_3 - I_1)\,5\Omega - 18V - I_3\,3\Omega - I_3 1\Omega + 18V &= 0
\end{aligned}
$$

Resistencias en serie y en paralelo



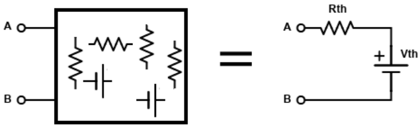
$$R_{\text{eq}}^{AB} = R_1 + R_2$$



$$R_{\text{eq}}^{AB} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

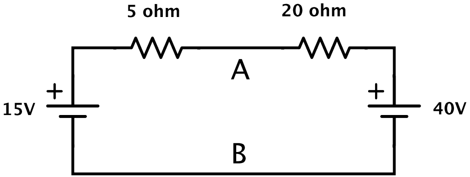
Teorema de Thevenin

El teorema de Thevenin establece que si una parte de un circuito eléctrico está comprendida entre dos terminales A y B, esta parte puede sustituirse por un circuito equivalente compuesto por una fuente y una resistencia a las que llamaremos V_{AB}^{eq} y R_{eq}:



- La resistencia equivalente R_{eq} es la resistencia equivalente entre A y B sustituyendo donde hay fuentes por un cable (cortocircuitando las fuentes).
- La fuente equivalente V_{eq} es la caída de tensión entre A y B a circuito abierto.

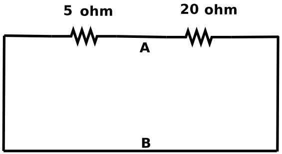
Problema 8



1. Hallar el equivalente de Thevenin entre los puntos A y B
2. Determinar la potencia suministrada a una resistencia R
3. Hallar el valor de R tal que la transferencia de potencia sea máxima

Problema 8

En este circuito, reemplazar las fuentes por cables, nos lleva al siguiente circuito:

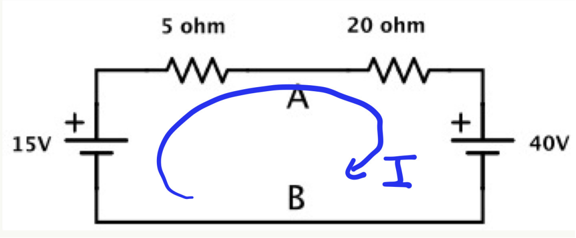


Se puede ver que la resistencia de 5Ω está en paralelo con la resistencia de 20Ω:

$$R_{AB}^{\text{th}} = \left(\frac{1}{5\,\Omega} + \frac{1}{20\,\Omega}\right)^{-1} = 4\,\Omega$$

Problema 8

Ahora vamos a calcular la fuente equivalente V_{AB}^{th}.



Como el circuito tiene una sola malla es facil ver que la corriente que circula se puede calcular a partir de la siguiente ecuación:

$$15V - I(5\Omega + 20\Omega) - 40V = 0$$

Con lo cual se obtiene que : $I = -1\ \text{A}$. Entonces

$$\begin{aligned} V_{\text{AB}}^{\text{th}} &= 15V + 5\Omega\, 1A = 20V \\ &= 40V - 20\Omega\, 1A = 20V \end{aligned}$$

Método alternativo para calcular el equivalente de Thevenin

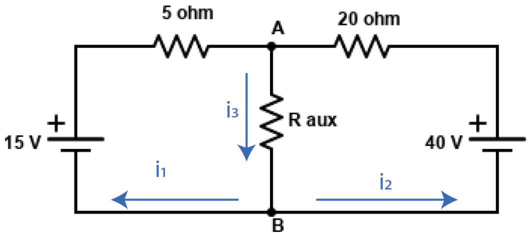
- Enchufamos una $R_{\rm aux}$ entre las terminales A y B
- Resolvemos el circuito y calculamos la corriente i_R que pasa por $R_{\rm aux}$.
- La fuente equivalente es

$$V^{\rm th} = \lim_{R_{\rm aux}\to\infty} i_R(R_{\rm aux})R_{\rm aux}$$

  donde i_R es la corriente que va de A a B y pasa por $R_{\rm aux}$.
- Se puede obtener la resistencia de dos formas:
  - $R^{\rm th} = R^{\rm eq}_{AB}$ (la más fácil, pero no siempre es posible)
  - $R^{\rm th} = \frac{V_{\rm th}}{\lim_{R_{\rm aux}\to 0} i_R}$

Problema 8

Al agregar una R_{aux} entre A y B obtenemos:



Para calcular la corrientes i_3 planteamos:

$$i_1 + i_2 = i_3$$

$$0 = 15V - i_1 5\Omega - i_3 R_{aux}$$

$$0 = 40V - i_2 20\Omega - i_3 R_{aux}$$

Problema 8

Despejando del sistema anterior obtengo

$$i_3(R_{\text{aux}}) = \frac{100V}{20\Omega + 5R_{\text{aux}}} \tag{1}$$

Entonces, para obtener la fuente equivalente calculamos

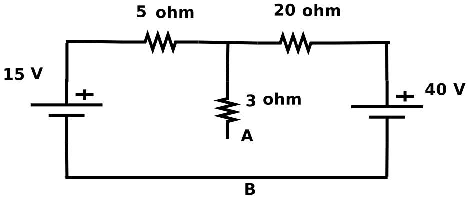
$$V^{\text{th}} = V_A - V_B = \lim_{R_{\text{aux}}\to\infty} i_3(R_{\text{aux}})R_{\text{aux}} = \frac{100V\, R_{\text{aux}}}{5R_{\text{aux}} + 20\Omega} = 20V \tag{2}$$

Para obtener R_{AB}^{th} podemos hacerlo (en este caso sencillo) igual que en el método anterior o bien calcular:

$$R_{\text{AB}}^{\text{th}} = \frac{V_{\text{th}}}{\lim_{R_{\text{aux}}\to 0} i_3} = \frac{20V}{5A} = 4\Omega \tag{3}$$

Aclaración importante

Supongamos que el circuito que nos presentan es el siguiente:

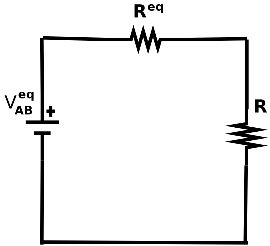


En este caso, como tenemos que calcular la V_{AB}^{eq} a circuito abierto, NO circula corriente por la resistencia de 3Ω y por lo tanto la V_{AB}^{eq} es la misma que en el caso del circuito anterior. No asi la R_{eq}, que se calcula de la siguiente manera:

$$R_{\text{eq}} = 3\Omega + \left(\frac{1}{5\,\Omega} + \frac{1}{20\,\Omega}\right)^{-1} = 7\,\Omega$$

Problema 8

Volviendo al Problema 8, se pide determinar la potencia suministrada a una resistencia que se conecta entre A y B si su valor es $R_1 = 1\Omega$.



Primero tenemos que calcular la corriente que circula por **este circuito**:

$$V_{AB}^{\text{eq}} - IR_{\text{eq}} - IR = 0$$

Por lo tanto se obtiene:

$$I = \frac{V_{AB}^{\text{eq}}}{R_{\text{eq}} + R} = \frac{20V}{4\Omega + 1\Omega} = 4A$$

Y ahora calculamos la potencia disipada por la resistencia:

$$P = I^2 R = (4A)^2\, 1\Omega = 16\,\text{Watt}$$

Recapitulemos un poco y escribamos la potencia disipada por la resistencia en función de R_{eq}:

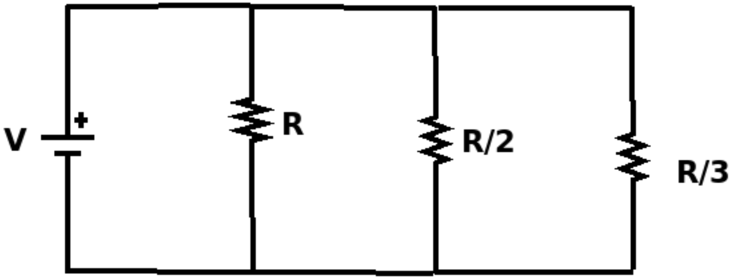
$$P(R) = I^2 R = \frac{{V_{AB}^{\text{eq}}}^2 R}{(R_{\text{eq}} + R)^2}$$

Para calcular cuando esa potencia es máxima:

$$\begin{aligned}
\frac{dP(R)}{dR} &= {V_{AB}^{\text{eq}}}^2 \frac{(R_{\text{eq}} + R)^2 - 2R(R_{\text{eq}} + R)}{(R_{\text{eq}} + R)^4} = 0 \\
&= {V_{AB}^{\text{eq}}}^2 \frac{(R_{\text{eq}} + R) - 2\,R)}{(R_{\text{eq}} + R)^3} = {V_{AB}^{\text{eq}}}^2 \frac{(R_{\text{eq}} - R)}{(R_{\text{eq}} + R)^3} = 0
\end{aligned}$$

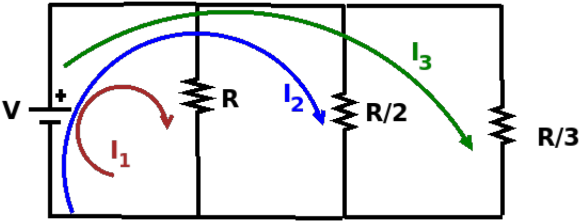
Entonces encontramos que la potencia será máxima cuando $R = R_{\text{eq}}$. En el caso del problema 8 $R_{\text{eq}} = 4\Omega$

Sea el siguiente circuito:



Vamos a ver una manera alternativa de plantear corrientes de malla que va a simplificar las cuentas en circuitos mas complejos.

La propuesta es definir las corrientes de malla de la siguiente manera:



Las ecuaciones de mallas son:

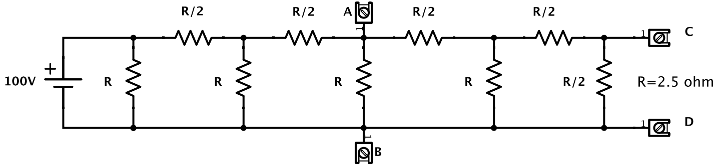
$$V - I_1 R = 0$$

$$V - I_2 \frac{R}{2} = 0$$

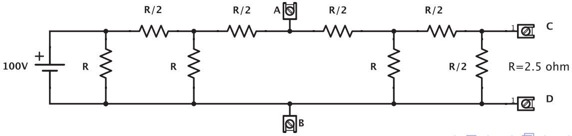
$$V - I_3 \frac{R}{3} = 0$$

Problema 9

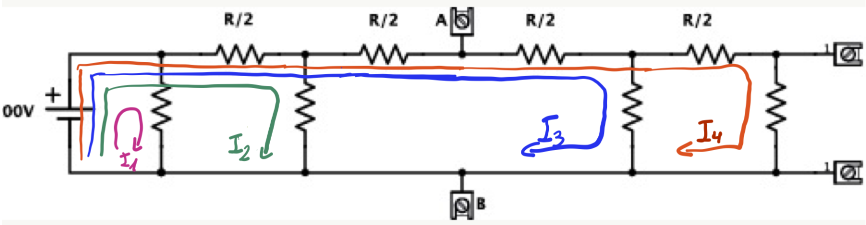
La propuesta del problema es usar el teorema de Thevenin para calcular V_{AB}. Para ello, vamos a calcular el $V_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{th}}$ y $R_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{th}}$



Para calcular el equivalente de Thevenin entre A y B, sacamos la resistencia que se encuentra entre A y B y calculamos $R_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{th}}$. Para ello es necesario cortocircuitar la fuente (los detalles de este cálculo lo dejo como tarea)



Ahora vamos a calcular el $V_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{th}}$ que **no es igual a** V_{AB}:



Las ecuaciones son:

$$V - I_1 R = 0 \tag{4}$$

$$V - (I_2 + I_3 + I_4)\frac{R}{2} - I_2 R = 0 \tag{5}$$

$$V - (I_2 + I_3 + I_4)\frac{R}{2} - (I_3 + I_4)R - I_3 R = 0 \tag{6}$$

$$V - (I_2 + I_3 + I_4)\frac{R}{2} - (I_3 + I_4)R - I_4 R = 0 \tag{7}$$

Problema 9

De la ecuación 4 obtenemos:

$$I_1 = \frac{V}{R}$$

Restando la ecuación 6 de la ecuación 7 obtenemos:

$$-I_3 R + I_4 R = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3 = I_4$$

Restando la ecuación 5 de la ecuación 6 y con $I_3 = I_4$ obtenemos:

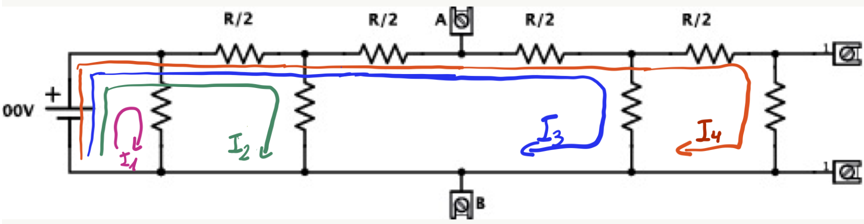
$$-I_2 R + 2I_3 R + I_3 R = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 3I_3$$

Usando $I_3 = I_4 = \frac{I_2}{3}$ en la ecuación 2 obtenemos:

$$V - (2I_3 + 3I_3)\frac{R}{2} - \frac{3I_3}{3}R = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{2}{11}\frac{V}{R} \qquad I_2 = 3I_3 = \frac{6}{11}\frac{V}{R}$$

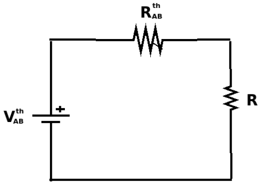
Problema 9

Calculamos ahora el $V_{\rm AB}^{\rm eq}$:



$$
\begin{aligned}
V_{\rm eq}^{AB} &= (I_3+I_4)\frac{R}{2} - I_2 R \\
&= 2I_3\frac{R}{2} - I_2 R \\
&= \frac{2}{11}\frac{V}{R}R - \frac{6}{11}\frac{V}{R}R \\
&= -\frac{4}{11}V = -\frac{400}{11}\mathrm{Volt}
\end{aligned}
$$

Ahora podemos calcular V_{AB} de la siguiente manera:



Calculamos primero la corriente que pasa por este circuito recordando que $R_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{th}} = \frac{5}{11}R$ y $V_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{th}} = \frac{400}{11}\mathrm{Volt}$

$$V_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{th}} - I(R_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{th}} + R) = 0$$

Y de esta manera obtenemos:

$$I = \frac{V_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{th}}}{(R_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{th}} + R)}$$

Finalmente calculamos V_{AB}:

$$V_{AB} = IR = \frac{25\mathrm{Volt}}{R}R = 25\mathrm{Volt}$$

Este resultado se puede verificar calculando V_{AB} por el método de mallas.

Divisor de tensión y divisor de corriente

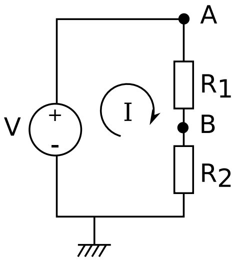
A continuación, vamos ver algunos circuitos particulares, bastante simples pero que resultan útiles:

- Divisor de tensión
- Divisor de corriente

El divisor de tensión lo que hace es justamente **dividir un voltaje** mediante el uso de resistencias en serie. Según entre que puntos se mida el voltaje obtendremos un valor distinto que depende de un cociente entre la resistencia que se atraviesa y el valor de la resitencia en serie equivalente. Por otro lado, el divisor de corriente **divide el valor de una corriente** mediante resistencias en paralelo. La corriente en cada rama depende del cociente de la resistencia equivalente y la resistencia de la rama correspondiente.

Divisor de tensión I

Simplemente planteando la
Ley de Kirchoff de Voltajes (LKV,
la suma de las subidas y caídas
de tensión en un circuito cerrado
o malla es cero) obtenemos que



$$V - R_1\, I - R_2\, I = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

Es sencillo ver que la caída
de tensión en cada resistencia es

$$\Delta V(R_1) = R_1\, I = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, V = \frac{R_1}{R_{\text{eq serie}}}\, V$$

$$\Delta V(R_2) = R_2\, I = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\, V = \frac{R_2}{R_{\text{eq serie}}}\, V$$

Divisor de tensión II

Este resultado se puede generalizar para N resistencias en serie. La caída de tensión en cada resistencia es

$$\Delta V(R_i) = \frac{R_i}{R_{\text{eq serie}}} V$$

Divisor de corriente I

Simplemente planteando la Ley de Kirchoff de Corrientes (LKC, la suma de las corrientes entrantes es igual a la suma de las corrientes salientes) obtenemos que

$$\mathrm{I} = i_1 + i_2$$

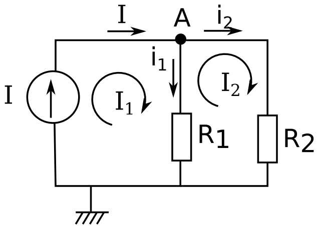


FIGURA: El círculo con una flecha representa una fuente de corriente

Planteando la caía de tensión en la malla de la derecha obtenemos:

$$+R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 i_1 = R_2 i_2$$

Es decir, finalmente

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1} i_2$$

Divisor de corriente II

Combinando con la primera ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{R_2}{R_1} i_2 = \frac{R_2}{R_1}(I - i_1) \\ i_1\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) &= \frac{R_2}{R_1} I \\ i_1(R_1 + R_2) &= R_2 I \end{aligned}$$

combinando ambas expresiones llegamos a que

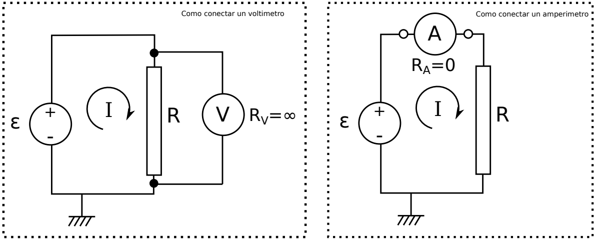
$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathrm{I} = \frac{R_{\text{eq paralelo}}}{R_1}\,\mathrm{I}\,, \quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\mathrm{I} = \frac{R_{\text{eq paralelo}}}{R_2}\,\mathrm{I} \qquad (8)$$

Divisor de corriente III

Este resultado se puede generalizar para N resistencias en parlelo. La corriente en cada rama es

$$i_i = \frac{R_{\text{eq paralelo}}}{R_i}\,\mathrm{I} \tag{9}$$

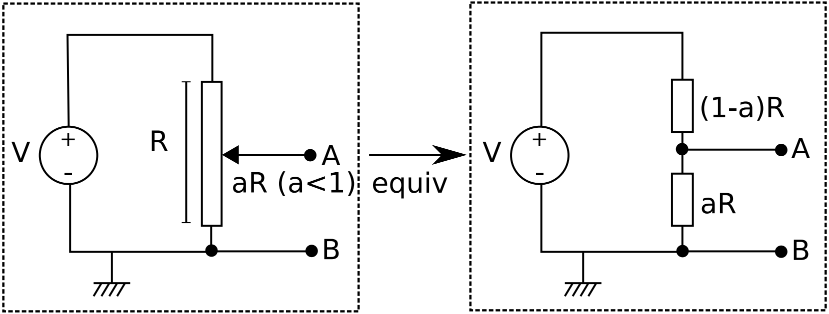
¿Cómo conectar un voltímetro y un amperímetro?



El voltímetro se conecta en paralelo a la caída de tensión que se desea medir y debe ser a **circuito abierto** (la corriente que circula a través del voltímetro debe ser despreciable $R_{\text{voltímetro}} \simeq \infty$).
El amperímetro se conecta en serie con la rama del circuito para medir la corriente que circula por ella, es decir, se hace en **corto circuito** (el amperímetro no debe generar una caída de tensión que afecte al circuito $R_{\text{amperímetro}} \simeq 0$).

Problema 10

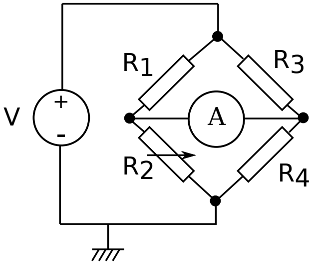
Algunos comentarios sobre el Problema 10



Notar que en el circuito de la derecha la resistencia aR es la resistencia de carga. A este tipo de circuito se lo denomina potenciómetro. Noten que variando el valor de a se pueden obtener distintos voltajes de salida, desde $V_{\text{out}} = 0$ para $a = 0$ hasta $V_{\text{out}} = V$ para $a = 1$.

Problema 12

Un puente de Wheatstone se puede usar para medir resistencias.



La resistencia R_2 es variable, R_1 y R_3 son conocidas y queremos saber R_4. La idea es ajustar el valor de R_2 hasta que no circule corriente entre los puntos C y D (es decir, no hay diferencia de potencial entre esos puntos) y eso ocurre cuando se cumple

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \tag{10}$$

Problema 13

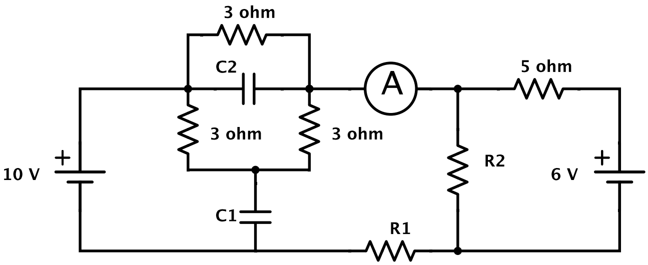


Figura: $C_1 = 2\mu\text{F}$, $C_2 = 3\mu\text{F}$

Para resolver el problema asumir que los capacitores ya están cargados.