Clase 8-9: Capacitores

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

18 de septiembre de 2021

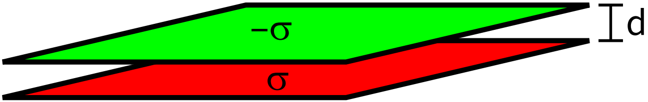
Capacitores

En esta clase vamos a estudiar los **capacitores** (o **condensadores**). Según la Wikipedia *un capacitor es un dispositivo electrónico que almacena energía eléctrica en un campo eléctrico*. En su versión más simple es básicamente un conductor cargado. El ejemplo más habitual consiste en dos placas enfrentadas cada una con cargas iguales y opuestas. En realidad cualquier sistema que consista de conductores cargados puede considerarse un capacitor. Los capacitores son uno de los componentes más usados en electrónica.

Figura: Diferentes tipos de capacitores. Fuente: Wikipedia.

Capacitores

Quizá la manera más práctica y clara de introducir el concepto de capacitor es considerar el arreglo de dos placas paralelas infinitas con cargas opuestas



El campo eléctrico de esta configuración se puede obtener por superposición dos placas infinitas con densidades de carga opuesta.

El campo eléctrico entre las placas es constante y vale

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z} \tag{1}$$

Capacitores

Calculemos ahora la diferencia de potencial entre las placas. Por convención lo vamos a calcular como el valor más alto del potencial (en la placa positiva) menos el valor más bajo del potencial (en la placa negativa)

$$\Delta V = V(0) - V(d) = -\int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_d^0 \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} \cdot \hat{z} dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q\, d}{\epsilon_0\, A} \quad (2)$$

donde $Q = \sigma\, A$ es la carga encerrada en una superficie de área A.

Se define la **capacidad** C (no confundir con el Coulomb $\mathtt{C}$) como el coeficiente de proporcionalidad entre la carga y la diferencia de potencial

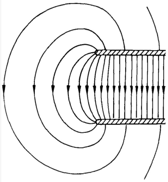
$$Q = C\, \Delta V \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (3)$$

En el sistema MKS las unidades de C son Coulomb/Volt, lo que se define como Faradio $\mathtt{F} = \mathtt{C}/\mathtt{V}$.

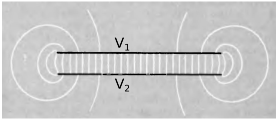
Entonces como $\Delta V = \dfrac{Q\, d}{\epsilon_0\, A}$ la capacidad de dos placas paralelas es

$$C = \frac{\epsilon_0\, A}{d} > 0 \tag{4}$$

La aproximación de placa infinita es en realidad muy buena. Basta con que la distancia entre placas d sea mucho menor que cualquier otra escala característica del capacitor de modo tal de poder despreciar los efectos de borde



(A) Fuente: Feynman



(B) Fuente: Purcell

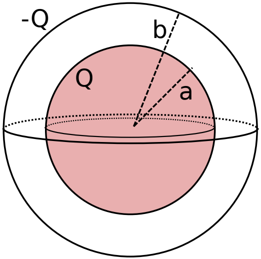
El Faradio resulta ser una cantidad gigantezca, a modo de comparación la capacidad de la Tierra es de 710 micro-Faradios ($\mu\mathtt{F} = 10^{-6}\mathtt{F}$). Habitualmente se usa como medida de capacidad el pico-Faradio ($\mathtt{pF} = 10^{-12}\mathtt{F}$).

Si tuviésemos dos placas paralelas separadas una distancia $d = 1mm$, entonces para tener una capacidad de $1\mathtt{pF}$ necesitaríamos placas de aproximandamente $113m^2$.

IMPORTANTE: La capacidad sólo depende de la geometría del conductor. Veremos más ejemplos a continuación.

Problema 10: capacitor esférico

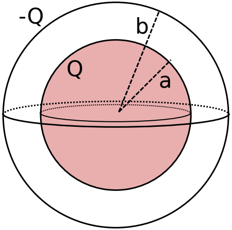
El Problema 10 de la guía 2 nos pide hallar la capacidad de distintos arreglos de conductores. La configuración del inciso b) son dos esferas conductoras



Para este problema nos interesa saber el campo eléctrico entre las esferas. Esto puede obtenerse utilizando la ley de Gauss o superposición.

Problema 10: capacitor esférico

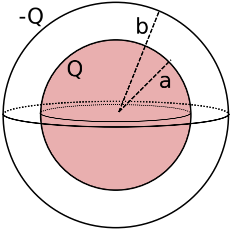
Recordemos el campo de una esfera de radio R cargada en superficie con carga Q :



$$\vec{E}(\vec{r}) \quad = \quad \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} & r > R\,. \end{cases}$$

Problema 10: capacitor esférico

Recordemos el campo de una esfera de radio R cargada en superficie con carga Q :



$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} & r > R\,. \end{cases}$$

En este caso tenemos la superposición de dos esferas, una de radio a y otra de radio b.

$$\vec{E}_{\text{region intermedia}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\hat{r}\,, \quad r \in [a, b] \qquad (5)$$

donde $Q = 4\pi a^2\,\sigma$ es la carga total de la esfera interior.

Problema 10: capacitor esférico

Calculemos la diferencia de potencial entre $r = a$ (conductor a potencial positivo) y $r = b$ (conductor a potencial negativo)

$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\Big|_b^a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad (6)$$

con lo cual, recordando que la capacidad está dada por el cociente entre la carga y la diferencia de potencial $C = Q/\Delta V$

$$C_{\text{capacitor esférico}} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} > 0 \quad (7)$$

Notemos que C sólo depende de la geometría de los conductores.

Problema 10: capacitor esférico

Para calcular la **auto-capacidad** de una esfera conductora simplemente tenemos que tomar el límite $b \to \infty$ en la expresión anterior.

Esto es lo mismo que haber comenzado con la configuración de una esfera sola y calcular la diferencia de potencial entre ésta y el infinito, donde fijamos $V(r = \infty) = 0$

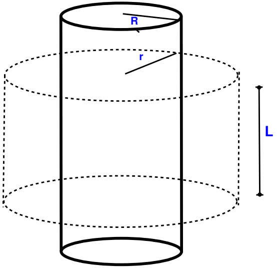
$$C_{\text{esfera}} = 4\pi\epsilon_0 a \tag{8}$$

Nuevamente podemos notar que la capacidad depende únicamente de la geometría del/los conductor/es.

Campo eléctrico de un cilindro cargado en superficie con σ

Llamando s a la coordenada radial de cilíndricas
Para ambas superficies de Gauss
(cilindro interior y cilindro exterior) vale:

$$\int\int \vec{E}.\vec{ds} = \int_0^L \int_0^{2\pi} E(s)\hat{s}.\hat{s} s d\theta dz$$
$$= 2\pi L s E(s)$$



Veamos
ahora la Q_{enc}. Para $s < R$ $Q_{\text{enc}} = 0$
y por lo tanto $E(s) = 0$. Para $s > R$

$$Q_{\text{enc}} = \int_0^{\pi} \int_0^L \sigma R d\theta dz = 2\pi R L \sigma = Q$$

Y por lo tanto

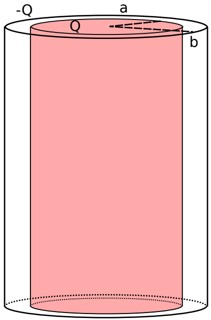
$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 s}\hat{s} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L s}\hat{s}$$

Capacitor cilíndrico

El inciso c) nos pide hallar la capacidad de un capacitor formado por dos cilindros infinitos concéntricos de radios a y b.

El campo eléctrico de esta configuración puede obtenerse por superposición o utilizando la ley de Gauss, aunque sólo nos interesa el campo en la región entre los conductores.

$$\vec{E}_{\text{region intermedia}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\, L\, s}\hat{s}\,, \quad s \in [a, b] \tag{9}$$



donde $Q = 2\pi a L\sigma$ es la carga encerrada en un largo L del cilindro interior

Capacitor cilíndrico

De nuevo, calculamos la diferencia de potencial entre el conductor con carga positiva (cilindro interior) y el conductor con carga negativa (cilindro exterior)

$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\, L\, s}\hat{s}\cdot\hat{s}ds = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{10}$$

Con lo cual la capacidad resulta ser

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \tag{11}$$

y dividiendo por L obtenemos la capacidad por unidad de longitud

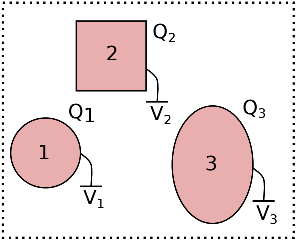
$$c = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} \tag{12}$$

Matriz de capacidad

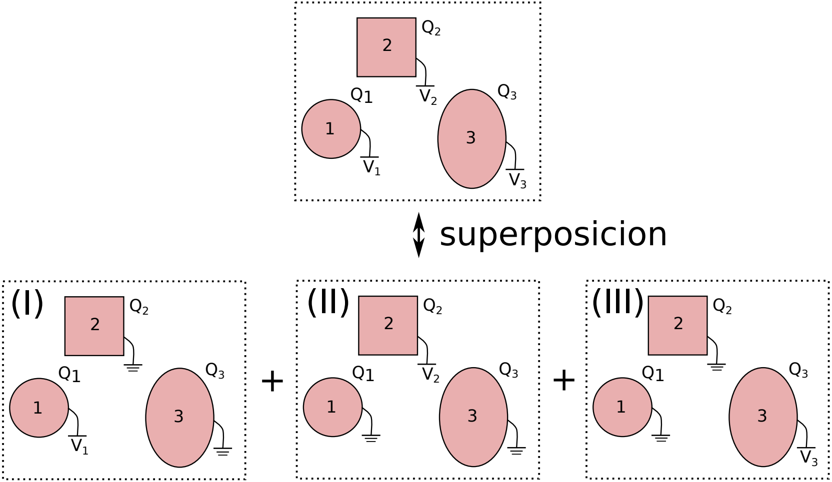
El caso de dos conductores es una configuración especial. Es posible considerar un arreglo de varios conductores cargados.

La llamada **matriz de capacidad o capacitancia** nos dice cómo se relacionan las cargas inducidas en un sistema de conductores con los potenciales a los que están sometidos cada uno de ellos.

Para verlo más claro vayamos a un ejemplo concreto



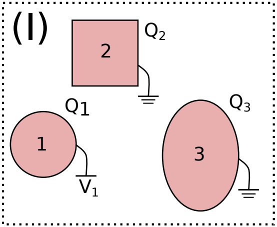
Matriz de capacidad



Configuración I: el conductor 1 al estar conectado a una batería que fija su voltaje al valor V_1 va adquirir una carga neta Q_1. Ésta carga va a inducir cargas Q_2 y Q_3 sobre los conductores 2 y 3 respectivamente y sólo puede depender de V_1. Entonces podemos escribir

$$Q_1 = C_{11} V_1\,, \quad Q_2 = C_{21} V_1\,, \quad Q_3 = C_{31} V_1 \tag{13}$$

donde $C_{11}\,, C_{21}\,, C_{31}$ son constantes que sólo dependen de la geometría de los conductores.



Matriz de capacidad

Siguiendo un razonamiento análogo, podemos escribir la configuración II como

$$Q_1 = C_{12} V_2 \,, \quad Q_2 = C_{22} V_2 \,, \quad Q_3 = C_{32} V_2 \tag{14}$$

y la configuración III como

$$Q_1 = C_{13} V_3 \,, \quad Q_2 = C_{23} V_3 \,, \quad Q_3 = C_{33} V_3 \tag{15}$$

Matriz de capacidad

El caso más general con los tres conductores conectados a baterías con voltajes arbitrarios V_1 , V_2 y V_3 puede obtenerse com superposición de las configuraciones I, II y III, quedando un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11} V_1 + C_{12} V_2 + C_{13} V_3 \\ Q_2 &= C_{21} V_1 + C_{22} V_2 + C_{23} V_3 \\ Q_3 &= C_{31} V_1 + C_{32} V_2 + C_{33} V_3 \end{aligned} \tag{16}$$

Este sistema de ecuaciones puede escribirse de forma matricial definiendo vectores columna $\vec{Q}$ y $\vec{V}$ cuyas componentes son las cargas Q_i y los voltajes V_i

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

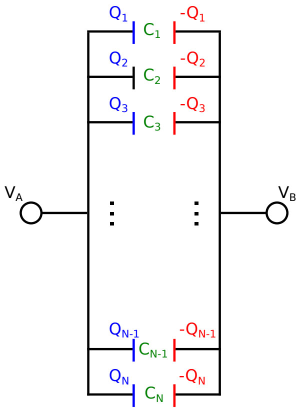
donde $[C]$ es la llamada matriz de capacidad. Se puede probar que la matriz es simétrica, $C_{ij} = C_{ji}$; y que los coeficientes diagonales $C_{ii} > 0$, mientras que los no-diagonales$C_{i\,j\neq i} < 0$. A los coeficientes C_{ii} se los denomina *de capacidad*, y a los coeficientes C_{ij} *de inducción*. Este análisis puede extenderse a un sistema de N conductores.

Capacidad equivalente

Ahora vamos a estudiar arreglos de capacitores, es decir, varios capacitores conectados entre si mediante conductores (cables) formando un circuito. Lo que nos interesa saber es cual el valor de capacidad equivalente entre dos puntos si entre medio hay una dada configuración de capacitores.

Capacitores en paralelo I

Supongamos que tenemos un arreglo de N capacitores como el de la figura y asumamos que $V_A - V_B > 0$, entonces se van a inducir cargas positivas en las caras izquierdas de los capacitores, esto a su vez va a inducir cargas de igual valor pero signo contrario en las caras derechas de los capacitores. Recordemos que la carga Q_i de cada capacitor está se puede obtener sabiendo el valor de su capacidad C_i y la diferencia de potencial V_i a la que está sometido. Notemos que en este caso estamos fijando el potencial del lado izquierdo a V_A y el derecho a V_B (con una batería que se conecta a los bornes A y B).



Capacitores en paralelo II

Entonces todos los capacitores se encuentran sometidos a la misma diferencia de potencial $\Delta V = V_A - V_B$.
La carga total de sistema es la suma de las cargas de cada uno de los capacitores

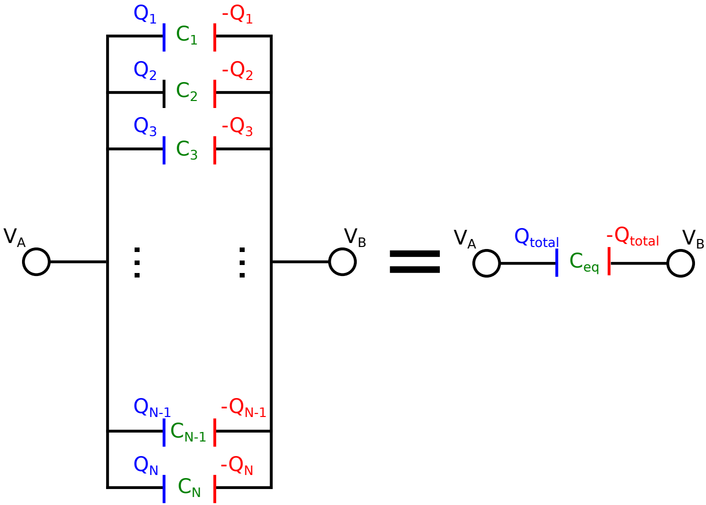
$$Q_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{N} Q_i = \sum_{i=1}^{N} C_i (V_A - V_B) = (V_A - V_B) \sum_{i=1}^{N} C_i = C_{\text{equiv}} (V_A - V_B) \tag{18}$$

donde definimos la capacidad equivalente en paralelo como

$$C_{\text{equiv}}^{(\text{paralelo})} \equiv \sum_{i=1}^{N} C_i \tag{19}$$

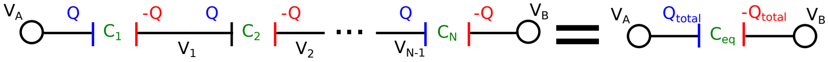
Esquemáticamente estamos viendo el circuito de la primer figura como

Capacitores en paralelo III



Capacitores en serie I

Ahora vamos a seguir un razonamiento análogo pero para capacitores conectados en serie



Notemos que el conductor que conecta la cara derecha del capacitor C_i y la cara izquierda del capacitor C_{i+1} está aislado, así que la carga total del mismo es cero, por eso la carga inducida de un lado y del otro tiene el mismo valor pero signo opuesto.

Capacitores en serie II

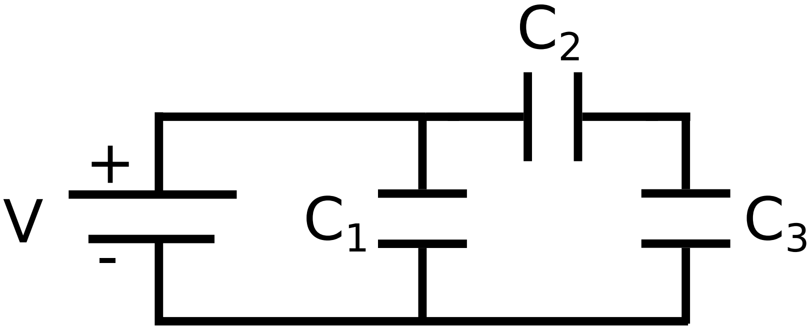
La diferencia de potencial entre los bornes A y B es la misma que la suma de las diferencias de potencial entre cada una de las caras de todos los capacitores

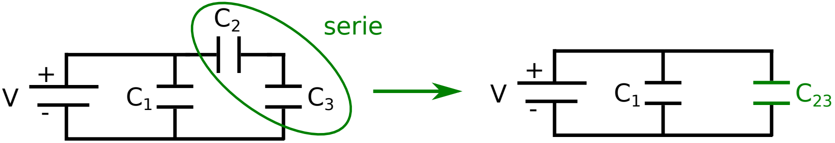
$$V_A - V_B = \underbrace{(V_A - V_1)}_{Q/C_1} + \underbrace{(V_1 - V_2)}_{Q/C_2} + \underbrace{(V_2 - V_3)}_{Q/C_3} + \ldots + \underbrace{(V_{N-1} - V_B)}_{Q/C_N}$$
$$= Q \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} = \frac{Q}{C_{\text{equiv}}} \tag{20}$$

donde definimos la capacidad equivalente en serie como

$$\frac{1}{C_{\text{equiv}}^{(\text{serie})}} \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \tag{21}$$

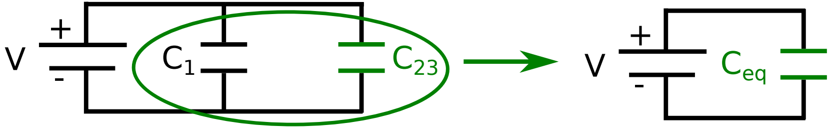
En el Problema 17 primero nos pide hallar la capacidad equivalente del siguiente circuito





Mirando fijamente un rato el circuito anterior podemos notar que C_2 y C_3 estan en serie, por lo tanto la capacidad equivalente es

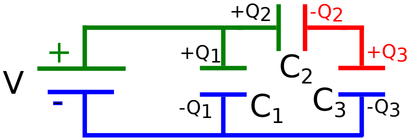
$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow C_{23} = \frac{C_2\, C_3}{C_2 + C_3} \tag{22}$$



Mirando fijamente un poco menos notamos que C_1 y C_{32} estan en paralelo y la capacidad equivalente es

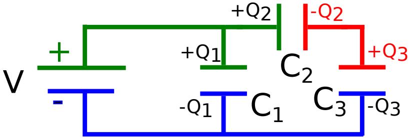
$$C_{\mathrm{eq}} = C_1 + C_{23} = C_1 + \frac{C_2\,C_3}{C_2 + C_3} = \frac{C_1\,C_2 + C_2\,C_3 + C_3\,C_1}{C_2 + C_3} \tag{23}$$

Luego nos pregunta cual es la carga de cada capacitor, para ello simplemente debemos recordar lo que vimos en la clase anterior, la carga acumulada en un capacitor es el producto de su capacidad por la caída de tensión entre sus caras.



Recordemos que cada conductor es un equipotencial. El conductor **azul** está a potencial V, el **verde** a $V = 0$ y el **rojo** a $V' \neq V$ (aunque no nos piden averiguar el valor de V').
En el capacitor 1 hay una diferencia de potencial V entre su cara superior y su cara inferior, entonces

$$Q_1 = C_1 V \tag{24}$$



La diferencia de potencial entre la cara verde del capacitor 2 y la cara azul del capacitor 3 también es V, entonces

$$V = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = Q_2 \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \Rightarrow Q_2 = \frac{C_2\, C_3}{C_2 + C_3} V \qquad (25)$$

Notemos además que el conductor rojo está aislado y su carga total es cero, por lo tanto $-Q_2 + Q_3 = 0$ entonces

$$Q_2 = Q_3 = \frac{C_2\, C_3}{C_2 + C_3} V \qquad (26)$$

También nos piden hallar la energía almacenada en el sistema.

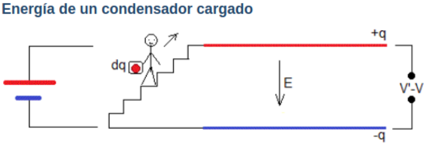


Figura: Fuente: Curso Interactivo de Física en Internet.

Para calcular la energía necesaria para cargar los capacitores del sistema tenemos que integrar el potencial desde $Q = 0$ hasta Q_{total}

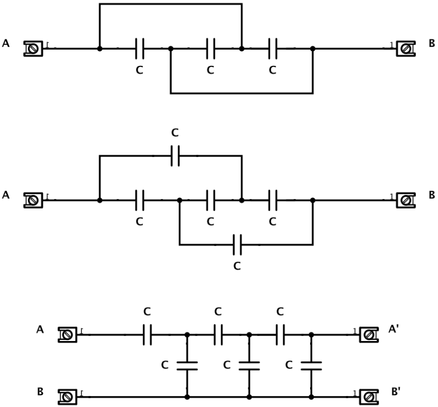
$$U = \int_{Q=0}^{Q=Q_{\mathrm{total}}} V dQ = \int_{Q=0}^{Q=Q_{\mathrm{total}}} \frac{Q}{C_{\mathrm{eq}}} dQ = \frac{1}{2} \frac{Q_{\mathrm{total}}^2}{C_{\mathrm{eq}}} \tag{27}$$

Reemplazando los valores correspondientes de $Q_T = C_{\rm eq} V$ y de $C_{\rm eq}$ obtenemos que

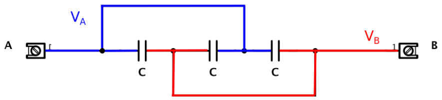
$$U = \frac{1}{2} C_{\rm eq} V^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}{C_2 + C_3} V^2 \tag{28}$$

chequeen uds que integrando la energía necesaria para cargar cada uno de los capacitores se llega al mismo resultado

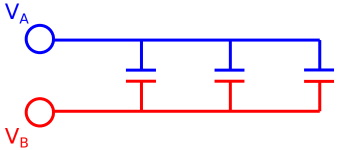
En el Problema 18 nos piden hallar las capacidades equivalentes medidas desde los terminales A y B de los siguientes circuitos



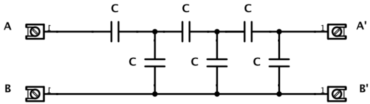
Empecemos con el primer circuito. Para hallar la capacidad equivalente va a resultar útil identificar cuales son los conductores que se encuentran al mismo potencial



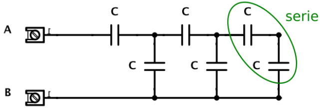
Teniendo esto en cuenta podemos re-dibujar el circuito de la siguiente manera



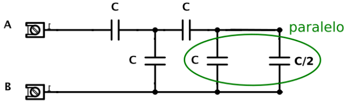
Ahora concentrémonos en el tercer circuito del problema



Nos piden hallar la capacidad viste desde lo terminales A y B, así que nos podemos olvidar por el momento del terminal A' y notemos que el terminal B' está al mismo potencial que el B.
Mirando fijo un rato el circuito notamos que los capacitores que están a la derecha están en serie



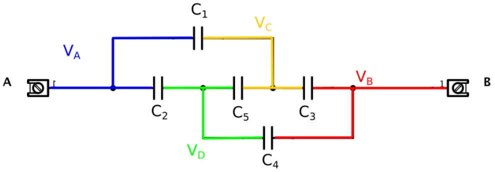
Entonces el circuito ahora queda así



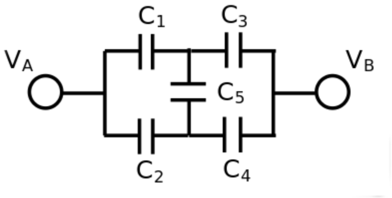
donde ahora podemos identificar dos capacitores que están en paralelo. Siguiendo la misma lógica llegamos a que

$$C_{\mathrm{eq}} = \frac{8}{13} C \tag{29}$$

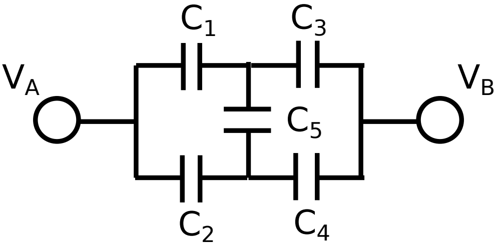
Finalmente analicemos el segundo circuito. Nuevamente va a ser útil identificar los capacitores que están a un mismo valor de potencial y ver si eso nos ayuda a dibujar el circuito de una manera más amigable



Re-dibujando el circuito nos queda

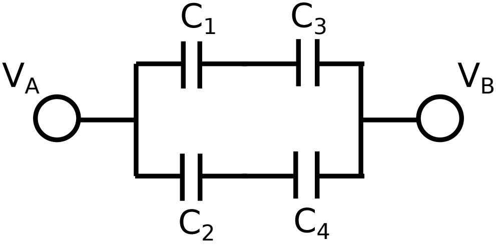


Después de pensarlo un rato nos damos cuenta que no es posible agrupar los capacitores y hallar capacidades equivalentes



Entonces, qué hacemos? Hay que resolver el circuito calculando las cargas inducidas y las diferencias de potencial.

Imagínemonos por un segundo que el capacitor 5 no está

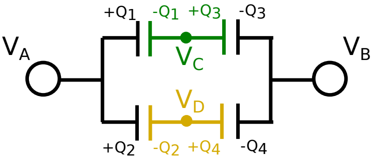


y que se cumplen las siguientes relaciones entre las capacidades (por ahora suena arbitrario pero ya se verá la razón de esto)

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4} = K \tag{30}$$

donde K es una constante.

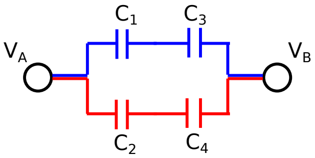
Analicemos las cargas inducidas en cada uno de los capacitores



los conductores verde y amarillo están aislados así que se cumple que $Q_1 = Q_3$ y que $Q_2 = Q_4$. Además el conductor verde está a potencial V_C (que lo desconocemos) y el verde a V_D (que tampoco conocemos). Sin embargo podemos escribir cual es la diferencia de potencial

$$\left.\begin{aligned} V_A - V_C &= Q_1/C_1 \\ V_A - V_D &= Q_2/C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_C - V_D = -Q_1/C_1 + Q_2/C_2 \tag{31}$$

Ahora calculamos la diferencia de potencial entre los terminales A y B por dos caminos distintos



Por el camino azul tenemos

$$V_A - V_B = Q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} Q_1 \tag{32}$$

y por el camino rojo

$$V_A - V_B = Q_2 \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4} \right) = \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} Q_2 \tag{33}$$

Tomando el cociente de las dos expresiones anteriores tenemos podemos obtener la siguiente relación

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2}\frac{C_3}{C_4}\frac{(C_2 + C_4)}{C_1 + C_3} \tag{34}$$

si recordamos la relación de proporcionalidad $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4} = K$ y la reemplazamos en la expresión anterior llegamos a que

$$\frac{Q_1}{Q_2} = K \tag{35}$$

Entonces la diferencia de potencial entre C y D es

$$V_C - V_D = -Q_1/C_1 + Q_2/C_2 = -\frac{KQ_2}{KC_2} + Q_2/C_2 = 0 \tag{36}$$

es decir, no hay diferencia de potencial entre esos puntos. Si colocamos un capacitor que una esos dos puntos no se va a cargar.
Notemos que el caso en que todas las capacidades son iguales cumple trivialmente la relación $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4} = K$, por lo tanto en el segundo circuito del Problema 18 el capacitor C_5 no juega ningún rol. Es fácil ahora calcular la capacidad equivalente entre los terminales A y B. Les queda de tarea.