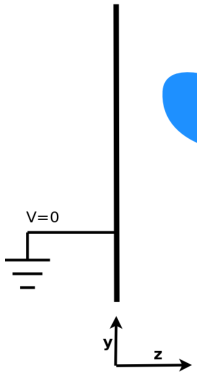
Clase 7: Método de imágenes

9 de septiembre de 2021

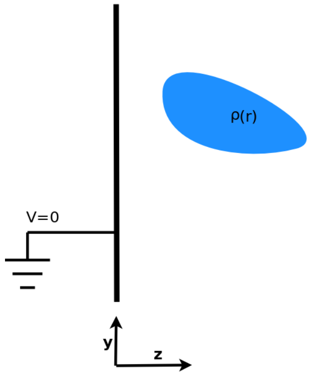
Unicidad de la solución a la ec. de Poisson

Recordemos que:
El potencial $V(\vec{r})$ dentro de un volumen $\mathcal{V}$ está univocamente determinado si se conoce la distribución de carga $\rho(\vec{r})$ en $\mathcal{V}$ y el valor de $V(\vec{r})$ en todos los bordes de $\mathcal{V}$.



Problema general: Determinar el potencial $V(\vec{r})$ de una distribución de carga $\rho(\vec{r})$ que se encuentra en una región limitada por la superficie de un conductor, conociendo $V(\vec{r})$ en la superficie del conductor.

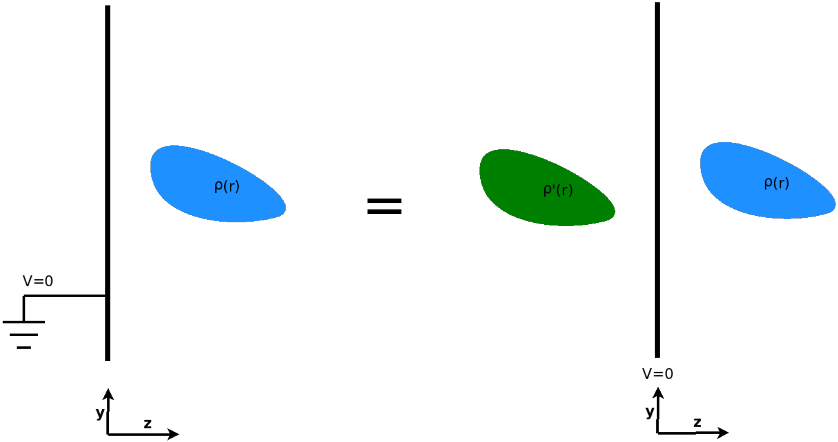
Recordemos que:
El potencial $V(\vec{r})$ dentro de un volumen $\mathcal{V}$ está univocamente determinado si se conoce la distribución de carga $\rho(\vec{r})$ en $\mathcal{V}$ y el valor de $V(\vec{r})$ en todos los bordes de $\mathcal{V}$.



Problema general: Determinar el potencial $V(\vec{r})$ de una distribución de carga $\rho(\vec{r})$ que se encuentra en una región limitada por la superficie de un conductor, conociendo $V(\vec{r})$ en la superficie del conductor.
Es decir, tenemos
que resolver la ecuación de Poisson $\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ con condiciones de contorno:

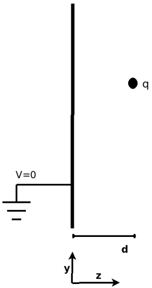
- $V(z=0)=0$
- $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$

La idea es encontrar la distribución $\rho'(\vec{r})$ de manera tal que $V_\rho(\text{sup}) + V_{\rho'}(\text{sup}) = 0$ y de esta manera encontrar $V(\vec{r})$ para $z > 0$



Carga frente a un plano conductor infinito

Tenemos una carga ubicada a una distancia d de un plano conductor infinito y queremos hallar el potencial para $z > 0$.



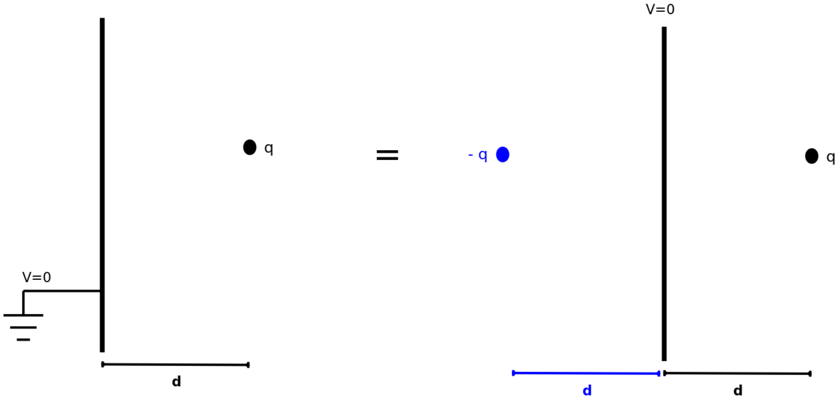
Las condiciones de contorno son:

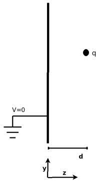
- $V(z = 0) = 0$
- $\lim_{r\to\infty} V(\vec{r}) = 0$

Si encontramos una solución
para la ec. de Poisson el teorema de
unicidad nos dice que es **la única** solución

Carga frente a un plano conductor infinito

En la clase teórica vieron que este problema es equivalente al problema de dos cargas opuestas separadas una distancia $2d$.





Entonces para $z > 0$ el potencial se puede expresar:

$$V(\vec{r}) = \frac{kq}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{1/2}} - \frac{kq}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{1/2}}$$

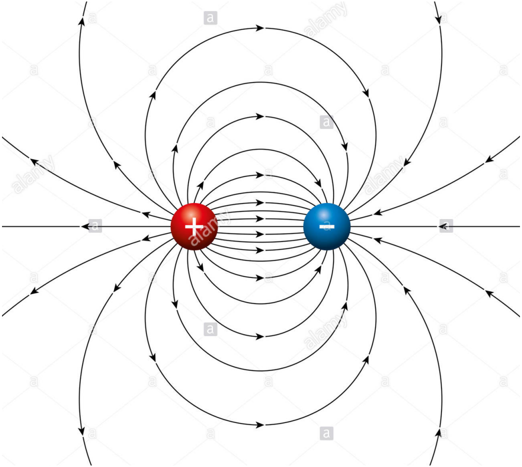
donde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ Y podemos obtener el campo $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

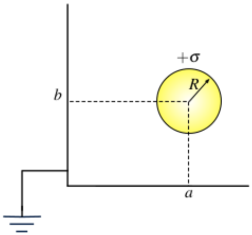
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kq(x,y,z-d)}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{3/2}} - \frac{kq(x,y,z+d)}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{3/2}}$$

Y finalmente podemos obtener la carga inducida como
$\sigma = -\epsilon_0 \frac{dV}{dn}|_S = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n}|_{z=0}$ donde $\hat{n} = \hat{z}$ es la normal al plano conductor.

$$\sigma(x,y) = -\frac{2\epsilon_0 kqd}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} = -\frac{qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

Campo eléctrico de dos cargas de distinto signo

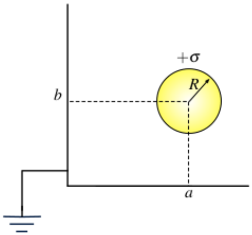




Se tiene un casquete
esférico cargado de radio R y densidad de carga superficial σ. El centro del casquete esférico se sitúa a una distancia horizontal a y vertical b con respecto a un plano conductor infinito doblado en 90. Encuentre la densidad de carga σ_x y σ_y sobre los ejes x e y grafique su forma aproximada.

- ¿Cuales son las condiciones de contorno ?
- ¿Cual será la carga imágen de este problema?

Ejercicio 9 Guia 2



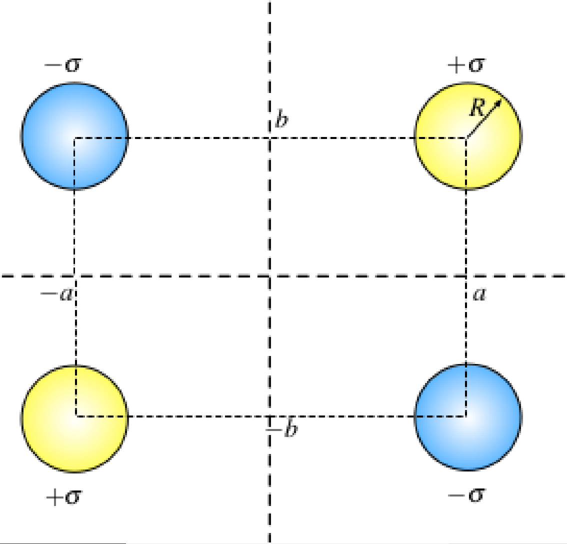
Se tiene un casquete esférico cargado de radio R y densidad de carga superficial σ. El centro del casquete esférico se sitúa a una distancia horizontal a y vertical b con respecto a un plano conductor infinito doblado en 90. Encuentre la densidad de carga σ_x y σ_y sobre los ejes x e y grafique su forma aproximada.

- ¿Cuales son las condiciones de contorno ?
- ¿Cual será la carga imágen de este problema?

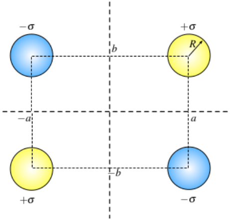
Las condiciones de contorno son:

- $V(x, 0, z) = 0$
- $V(0, y, z) = 0$.
- $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$.

Esquema de cargas *imagen* necesarias para resolver el problema



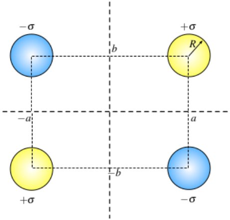
El problema que tenemos que resolver es la superposición de 4 esferas cargadas en superficie y desplazadas del origen de coordenadas.



Recordemos que el potencial de una esfera cargada en superficie situada en el origen de coordenadas se puede expresar (ver clase 6)

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\sigma R}{\epsilon_0} & r \leq R \\[2ex] \dfrac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} & r > R\,. \end{cases}$$

El problema que tenemos que resolver es la superposición de 4 esferas cargadas en superficie y desplazadas del origen de coordenadas.



Recordemos que el potencial de una esfera cargada en superficie situada en el origen de coordenadas se puede expresar (ver clase 6)

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\sigma R}{\epsilon_0} & r \leq R \\ \\ \dfrac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} & r > R\,. \end{cases}$$

Fuera de las esferas el potencial de una esfera centrada en $\vec{r}_e$ se puede escribir:

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_e|}$$

En este problema:

$$\vec{r}_1 = (a, b, 0) \qquad \vec{r}_2 = (-a, b, 0)$$
$$\vec{r}_3 = (-a, -b, 0) \qquad \vec{r}_4 = (a, -b, 0)$$

El potencial total afuera de la esfera se puede expresar :

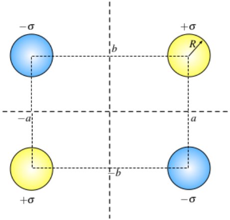
$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \times \left[\frac{1}{[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2]^{1/2}}\right]$$

Podemos verificar que el esquema de cargas imágenes propuesto es el adecuado para este problema evaluando $V(x,0,z)$ y $V(y,0,z)$:

$$V(x,0,z) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{[(x-a)^2+b^2+z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2+b^2+z^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2+b^2+z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-a)^2+b^2+z^2]^{1/2}}\right] = 0$$

Y evaluando $V(y,0,z)$ obtenemos:

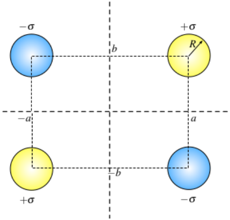
$$V(0,y,z) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \times \left[\frac{1}{[a^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[a^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}} + \frac{1}{[a^2+(y+b)^2+z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[a^2+(y+b)^2+z^2]^{1/2}}\right] = 0$$



Recordemos que el campo de una esfera cargada en superficie se puede expresar (ver clase 6)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \dfrac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} & r > R\,. \end{cases}$$

El problema que tenemos que resolver es la superposición de 4 esferas cargadas en superficie y desplazadas del origen de coordenadas.



Recordemos que el campo de una esfera cargada en superficie se puede expresar (ver clase 6)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \dfrac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} & r > R\,. \end{cases}$$

El problema que tenemos que resolver es la superposición de 4 esferas cargadas en superficie y desplazadas del origen de coordenadas. Fuera de las esferas el campo se puede escribir:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2 (\vec{r} - \vec{r}_e)}{\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_e|^3}$$

En este problema:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= (a, b, 0) \qquad \vec{r}_2 = (-a, b, 0) \\ \vec{r}_3 &= (-a, -b, 0) \qquad \vec{r}_4 = (a, -b, 0) \end{aligned}$$

El campo eléctrico se puede expresar:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma R^2(x-a,y-b,z)}{\epsilon_0[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{\sigma R^2(x+a,y-b,z)}{\epsilon_0[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2]^{3/2}} \\ &+ \frac{\sigma R^2(x+a,y+b,z)}{\epsilon_0[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{\sigma R^2(x-a,y+b,z)}{\epsilon_0[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

Finalmente para obtener las distribuciones de cargas inducidas recordamos que:

$$\sigma = \epsilon_0(\vec{E}\cdot\hat{n})|_S$$

donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie S. Entonces

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \epsilon_0(\vec{E}\cdot\hat{y})|_{y=0} \\ &= \frac{-\sigma R^2 b}{[(x-a)^2+b^2+z^2]^{3/2}} - \frac{-\sigma R^2 b,z)}{[(x+a)^2+b^2+z^2]^{3/2}} \\ &+ \frac{\sigma R^2 b}{[(x+a)^2+b^2+z^2]^{3/2}} - \frac{\sigma R^2 b}{[(x-a)^2+b^2+z^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

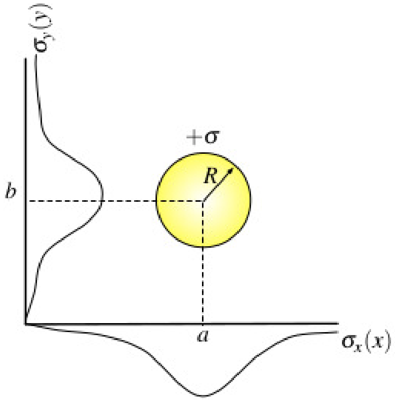
De esta manera se obtiene:

$$\sigma_x = 2b\sigma R^2 \left[\frac{-1}{[(x-a)^2+b^2+z^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2+b^2+z^2]^{3/2}} \right]$$

Calculamos ahora σ_y:

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= \epsilon_0(\vec{E}\cdot\hat{x})|_{x=0} \\
&= \frac{-\sigma R^2 a}{[a^2+(y-b)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{\sigma R^2 a}{[a^2+(y-b)^2+z^2]^{3/2}} \\
&\quad + \frac{\sigma R^2 a}{[a^2+(y+b)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{-\sigma R^2 a}{[a^2+(y+b)^2+z^2]^{3/2}} \\
&= 2\sigma R^2 a \left[\frac{-1}{[a^2+(y-b)^2+z^2]^{3/2}} + \frac{1}{[a^2+(y+b)^2+z^2]^{3/2}} \right]
\end{aligned}$$

Y el gráfico aproximado de las distribuciones:

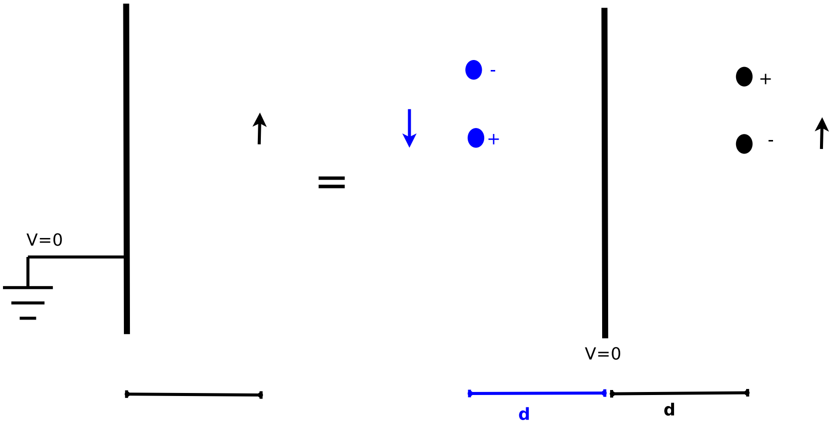


Ejercicio 15

Calcule la fuerza sobre un dipolo $\mathbf{p}$ ubicado a una distancia d de un plano conductor infinito, si el dipolo está: (a) perpendicular al plano y (b) paralelo al plano. ¿Cuál será la carga imágen?

Ejercicio 15

Calcule la fuerza sobre un dipolo $\mathbf{p}$ ubicado a una distancia d de un plano conductor infinito, si el dipolo está: (a) perpendicular al plano y (b) paralelo al plano. ¿Cuál será la carga imágen?



Ejercicio 15

Calcule la fuerza sobre un dipolo $\mathbf{p}$ ubicado a una distancia d de un plano conductor infinito, si el dipolo está: (a) perpendicular al plano y (b) paralelo al plano. ¿Cuál será la carga imágen?

Ejercicio 15

Calcule la fuerza sobre un dipolo $\mathbf{p}$ ubicado a una distancia d de un plano conductor infinito, si el dipolo está: (a) perpendicular al plano y (b) paralelo al plano. ¿Cuál será la carga imágen?