Clase 14: Magnetostática

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

18 de octubre de 2021

Esquema de la clase

- Fuerza de Lorentz: Fuerza entre un hilo y una cinta.
- Ley de Biot-Savart: Campo magnético de una espira circular y una espira cuadrada. Expresión del campo en el límite de grandes distancias

Fuerza de Lorentz

La fuerza sobre una partícula cargada con carga q en presencia de campo eléctrico $\vec{E}$ y campo magnético magnético $\vec{B}$ se puede escribir:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1}$$

de donde se deduce que

$$d\vec{F} = dq\,\vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} \tag{2}$$

Fuerza de Lorentz

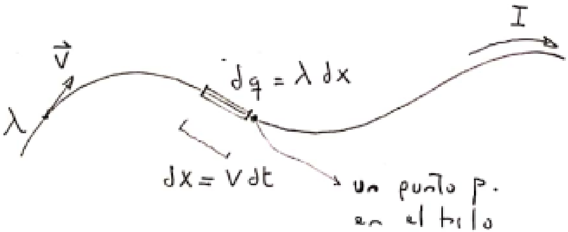
La fuerza sobre una partícula cargada con carga q en presencia de campo eléctrico $\vec{E}$ y campo magnético magnético $\vec{B}$ se puede escribir:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1}$$

de donde se deduce que

$$d\vec{F} = dq\,\vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} \tag{2}$$

En particular, si tenemos hilo de densidad λ moviendose con velocidad $\vec{v}$:



Un segmento de largo $\Delta x = v\Delta t$, que lleva carga $\Delta q = \lambda\Delta x = \lambda v\Delta t$ atraviesa un punto P en un tiempo Δt, por lo tanto

$$I = \frac{dQ}{dt} = \lambda v \tag{4}$$

Un segmento de largo $\Delta x = v\Delta t$, que lleva carga $\Delta q = \lambda \Delta x = \lambda v \Delta t$ atraviesa un punto P en un tiempo Δt, por lo tanto

$$I = \frac{dQ}{dt} = \lambda v \tag{4}$$

con lo cual obtenemos:

$$d\vec{F} = \lambda dl\, \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} = \lambda \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} dl = I \times \vec{B}_{\text{ext}} dl \tag{5}$$

Un segmento de largo $\Delta x = v\Delta t$, que lleva carga $\Delta q = \lambda \Delta x = \lambda v \Delta t$ atraviesa un punto P en un tiempo Δt, por lo tanto

$$I = \frac{dQ}{dt} = \lambda v \tag{4}$$

con lo cual obtenemos:

$$d\vec{F} = \lambda dl\, \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} = \lambda \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} dl = I \times \vec{B}_{\text{ext}} dl \tag{5}$$

y finalmente obtenemos la fuerza sobre un hilo por el cual circula corriente I en presencia de campo magnético externo:

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{ext}} \tag{6}$$

Un segmento de largo $\Delta x = v\Delta t$, que lleva carga $\Delta q = \lambda \Delta x = \lambda v \Delta t$ atraviesa un punto P en un tiempo Δt, por lo tanto

$$I = \frac{dQ}{dt} = \lambda v \tag{4}$$

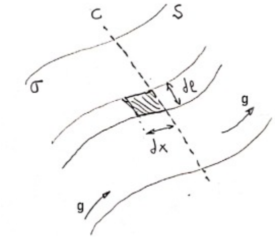
con lo cual obtenemos:

$$d\vec{F} = \lambda dl\, \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} = \lambda \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} dl = I \times \vec{B}_{\text{ext}} dl \tag{5}$$

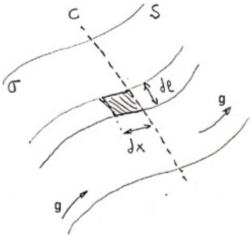
y finalmente obtenemos la fuerza sobre un hilo por el cual circula corriente I en presencia de campo magnético externo:

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{ext}} \tag{6}$$

Veamos ahora el caso de una superficie cargada con densidad de carga σ moviendose con velocidad $\vec{v}$ (tangente a la superficie)



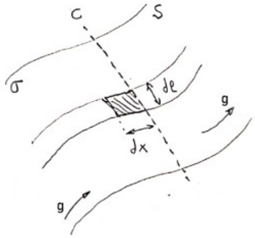
Veamos ahora el caso de una superficie cargada con densidad de carga σ moviendose con velocidad $\vec{v}$ (tangente a la superficie)



En un cuadrado de superficie $dxdl$:

$$dq = \sigma dxdl \tag{7}$$

Veamos ahora el caso de una superficie cargada con densidad de carga σ moviendose con velocidad $\vec{v}$ (tangente a la superficie)



En un cuadrado de superficie $dxdl$:

$$dq = \sigma dxdl \tag{7}$$

Consideremos una cinta de ancho dl y lados paralelos a la corriente. Se define la densidad superficial de corriente:

$$\vec{g} = \frac{d\vec{I}}{dl} = \frac{d^2Q}{dldt}\hat{v} \tag{8}$$

donde $\hat{v}$ indica la dirección de la la corriente (o de la velocidad de los portadores de carga)

A su vez, podemos escribir:

$$d\vec{I} = \frac{\sigma dx \hat{x} dl}{dt} = \sigma \vec{v} dl \tag{9}$$

A su vez, podemos escribir:

$$d\vec{I} = \frac{\sigma dx \hat{x} dl}{dt} = \sigma \vec{v} dl \tag{9}$$

y por lo tanto

$$\vec{g} = \frac{d\vec{I}}{dl} = \frac{\sigma \vec{v} dl}{dl} = \sigma \vec{v} \tag{10}$$

$$d\vec{F} \;\;=\;\; \sigma dS \; \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}}$$

A su vez, podemos escribir:

$$d\vec{I} = \frac{\sigma dx \hat{x} dl}{dt} = \sigma \vec{v} dl \tag{9}$$

y por lo tanto

$$\vec{g} = \frac{d\vec{I}}{dl} = \frac{\sigma \vec{v} dl}{dl} = \sigma \vec{v} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \sigma dS \; \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} \\ &= \vec{g} \times \vec{B}_{\text{ext}} \, dS \end{aligned} \tag{11}$$

A su vez, podemos escribir:

$$d\vec{I} = \frac{\sigma dx \hat{x} dl}{dt} = \sigma \vec{v} dl \tag{9}$$

y por lo tanto

$$\vec{g} = \frac{d\vec{I}}{dl} = \frac{\sigma \vec{v} dl}{dl} = \sigma \vec{v} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \sigma dS\ \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} \\ &= \vec{g} \times \vec{B}_{\text{ext}}\, dS \end{aligned} \tag{11}$$

De de esta manera, la fuerza sobre una distribución de corriente en superficie $\vec{g}$, en presencia de un campo magnético externo se puede escribir :

$$\vec{F} = \int \vec{g} dS \times \vec{B}_{\text{ext}} \tag{12}$$

A su vez, podemos escribir:

$$d\vec{I} = \frac{\sigma dx\hat{x}dl}{dt} = \sigma\vec{v}dl \tag{9}$$

y por lo tanto

$$\vec{g} = \frac{d\vec{I}}{dl} = \frac{\sigma\vec{v}dl}{dl} = \sigma\vec{v} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \sigma dS\ \vec{v} \times \vec{B}_{\text{ext}} \\ &= \vec{g} \times \vec{B}_{\text{ext}}\, dS \end{aligned} \tag{11}$$

De de esta manera, la fuerza sobre una distribución de corriente en superficie $\vec{g}$, en presencia de un campo magnético externo se puede escribir :

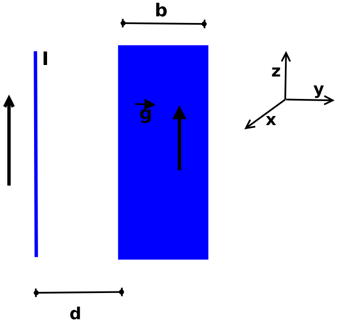
$$\vec{F} = \int \vec{g}dS \times \vec{B}_{\text{ext}} \tag{12}$$

De manera análoga si mientras que si tenemos una distibución de corriente en volumen $\vec{j}$:

$$\vec{F} = \int \vec{j}dV \times \vec{B}_{\text{ext}} \tag{13}$$

Problema 5

Calcular la fuerza por unidad de longitud entre una cinta infinita de ancho b por la que circula una densidad superficial de corriente $\vec{g}$ uniforme, y un cable infinito coplanar y paralelo por el que circula una corriente I de igual sentido que $\vec{g}$.



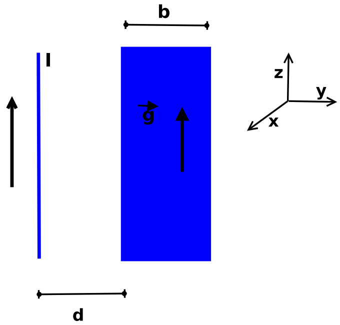
$$\vec{F} = \int \vec{g} dS \times \vec{B}_{\text{hilo}}$$

Vamos
a tomar el resultado del campo del hilo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}(-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$

y evaluamos el campo del hilo en el plano
y-z porque tenemos que calcular el campo
del hilo en la posición de la cinta, es decir $x = 0$ $(\phi = \frac{\pi}{2})$

Obtenemos la expresión de campo del hilo en $x = 0$:



$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{x}$$

Se pide
la fuerza por unidad de longitud,
por lo tanto, en vez de integrar
en la superficie $dS = dydz$,
vamos a integrar solamente en dy

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_d^{d+b} g\hat{z}dy \times (-\frac{\mu_0 I}{2\pi y})\hat{x} \\ &= -\frac{\mu_0 I g}{2\pi}\int_d^{d+b}\frac{1}{y}\hat{y} \\ &= -\frac{\mu_0 I g}{2\pi}\ln(\frac{d+b}{b})\hat{y}\end{aligned}$$

Ley de Biot-Savart

El campo magnético generado por una corriente estacionaria I se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l'} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{14}$$

donde

- $\vec{r}$ es el punto campo (donde queremos calcular el campo magnético).
- $\vec{r'}$ es el punto fuente (donde está la corriente fuente del campo magnético).
- $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$ es la permeabilidad del vacío.
- Las unidades del campo magnético son los Tesla $= \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}}$.

Cuando la fuente del campo magnético es una distribución de corriente en volumen $\vec{j}$, el campo magnético se puede expresar de la siguiente manera:

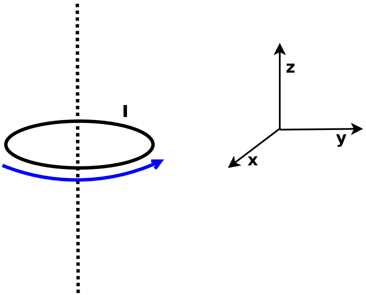
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\, dV' \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{15}$$

mientras que si la fuente del campo magnético es una distribución de corriente en superficie $\vec{g}$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{g}\, dS' \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{16}$$

Problema 6

Calcular el campo magnético sobre el eje de una espira circular de área A y corriente I. El radio de la espira es $a = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$



Vamos
a usar la Ley de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\vec{dl'} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

- $\vec{r} = (0, 0, z) = z\hat{z}$
- $\vec{r'} = (a\cos\phi, a\,\mathrm{sen}\,\phi, 0) = a\hat{r}$
- $\vec{dl'} = a\,d\phi\,\hat{\phi}$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{dl'} \times (\vec{r} - \vec{r'}) &= a\,d\phi\,\hat{\phi} \times (z\hat{z} - a\hat{r}) \\ &= a\,z\,d\phi\,\hat{r} + a^2\,d\phi\,\hat{z} \end{aligned}$$

Problema 6

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I(a\,z\,d\phi\,\hat{r} + a^2\,d\phi\,\hat{z})}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

Recordemos que $\hat{r} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ y que $\int_0^{2\pi}\cos\phi\,d\phi = \int_0^{2\pi}\sin\phi\,d\phi = 0$, entonces obtenemos el campo de una espira circular sobre el eje z:

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Ia^2\,d\phi\,\hat{z}}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

Problema 6

Veamos ahora cuál es la expresión a la cual podemos aproximar el campo magnético para distancias grandes, es decir $z >> a$. Podemos escribir

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} = \frac{\mu_0 I a^2}{2|z|^3(1+\frac{a^2}{z^2})^{3/2}}\hat{z}$$

LLamando $x = \frac{a}{z}$, vamos a hacer un desarrollo de Taylor de la función $f(x) = (1+x^2)^{-3/2}$ alrededor de $x_0 = 0$ y con $x - x_0 = \epsilon = \frac{a}{z}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^2)^{-3/2} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -3x(1+x^2)^{-5/2} & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= 15x(1+x^2)^{-7/2} - 3(1+x^2)^{-5/2} & f''(0) &= -3 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $(1+x^2)^{-3/2} \simeq 1 - \frac{3}{2}\epsilon^2$:

$$\frac{1}{(1+\frac{a^2}{z^2})^{3/2}} \simeq 1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{z^2}$$

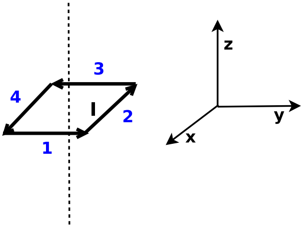
Problema 6

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2|z|^3}(1-\frac{3a^2}{2z^2})\hat{z}$$
$$\simeq \frac{\mu_0 I A}{2\pi|z|^3}(1-\frac{3a^2}{2z^2})\hat{z}$$

donde recordemos que A es el área de la espira.

Problema 6

Calcular el campo magnético sobre el eje de una espira cuadrada de lado D y corriente I.



La idea es aplicar
la ley de Biot-Savart en cada uno de los lados de la espira cuadrada, recorriéndola en sentido antihorario. En clase solo calcularemos dos segmentos (lados 1 y 3), pero las cuentas son análogas para los otros dos (hacer de tarea para fijar ideas!).

Problema 6

Empecemos por el lado 1, donde tenemos:

- $\vec{r} = (0, 0, z)$
- $\vec{r'} = (\frac{D}{2}, y', 0)$
- $\vec{dl'} = dy'\hat{y}$

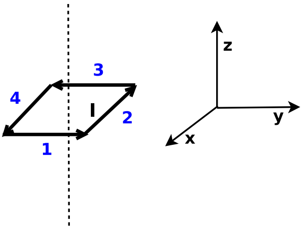
$$\vec{B}_1(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-D/2}^{D/2} \frac{I dy'\hat{y} \times (-\frac{D}{2}, -y', z)}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Haciendo el producto vectorial obtenemos

$$
\begin{aligned}
\vec{B}_1(0,0,z) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-D/2}^{D/2} \frac{I\frac{D}{2}dy'\hat{z}}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}} \\
&\quad \underbrace{+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-D/2}^{D/2} \frac{Izdy'\hat{x}}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}}_{A} \\
&= \frac{\mu_0 DI}{8\pi} \frac{y'\,\hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2}}\Big|_{-D/2}^{D/2} + A
\end{aligned}
$$

Problema 6

$$\vec{B}_1(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \frac{D^2\ \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} + A$$



Vamos a aplicar la
ley de Biot-Savart al lado 3, donde tenemos:

- $\vec{r} = (0,0,z) = z\hat{z}$
- $\vec{r'} = (-\frac{D}{2}, y', 0)$
- $d\vec{l}' = dy'\hat{y}$

$$\vec{B}_3(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{D/2}^{-D/2} \frac{I dy'\hat{y} \times (\frac{D}{2}, -y', z)}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Problema 6

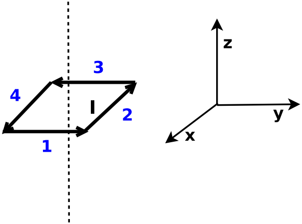
$$\vec{B}_3(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{D/2}^{-D/2} \frac{I dy' \hat{y} \times (\frac{D}{2}, -y', z)}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Resolviendo el producto vectorial obtenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{B}_3(0,0,z) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{D/2}^{-D/2} \frac{I(-\frac{D}{2}) dy' \hat{z}}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}} \\
&\quad \underbrace{+ \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{D/2}^{-D/2} \frac{I z dy' \hat{x}}{\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2\right]^{3/2}}}_{C} \\
&= \frac{\mu_0 D I}{8\pi} \frac{-y'\hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + y'^2 + z^2}}\Big|_{D/2}^{-D/2} + C
\end{aligned}$$

Problema 6

$$\vec{B}_3(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} + C$$



El campo total será la suma del campo generado por cada segmento. Se puede ver que $A + C = 0$. O sea, solo sobrevive la componente z del campo. Por simetría, en los lados 2 y 4 pasa lo mismo $(B_{24} = B_{13})$. Por lo tanto, el campo magnético total de la espira cuadrada es: $B_T = 2B_{13}$

$$\vec{B}_T(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}}$$

Problema 6

Veamos ahora la expresión del campo magnético para distancias grandes, es decir $z >> D$. Podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
\vec{B}_T(0,0,z) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right] \sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} \\
&= \frac{\mu_0 I D^2}{2\pi |z|^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{D^2}{4z^2}\right) \sqrt{1 + \frac{D^2}{2z^2}}}
\end{aligned}
$$

Problema 6

Veamos ahora la expresión del campo magnético para distancias grandes, es decir $z >> D$. Podemos escribir:

$$\begin{aligned} \vec{B}_T(0,0,z) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{D^2 \hat{z}}{\left[z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right] \sqrt{\frac{D^2}{2} + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I D^2}{2\pi |z|^3} \frac{1}{(1 + \frac{D^2}{4z^2}) \sqrt{1 + \frac{D^2}{2z^2}}} \end{aligned}$$

a orden 0 podemos considerar $\frac{D}{z} = 0$ y obtenemos:

$$\vec{B}_T(0,0,z) \simeq \frac{\mu_0 I D^2}{2\pi |z|^3} \hat{z} = \frac{\mu_0 I A}{2\pi |z|^3} \hat{z}$$

donde A es el área de la espira. Y podemos ver que a orden 0 coincide la expresión para la espira cuadrada y para la espira circular.