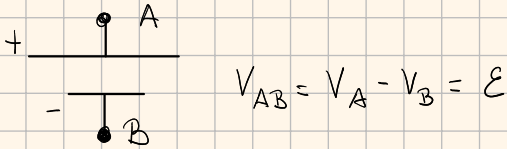


# 14/06/21 Clase 20: Circuitos de Corriente Variable (Respuesta Transitoria)

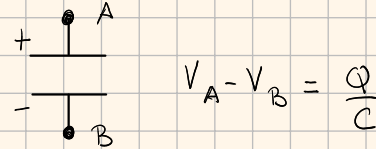
## ● Repaso de elementos de circuitos

(Refs: Milford, Reitz pág 133, 246; Zangwill pág 283)

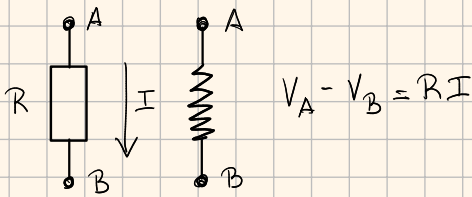
### ▶ FEM (batería)



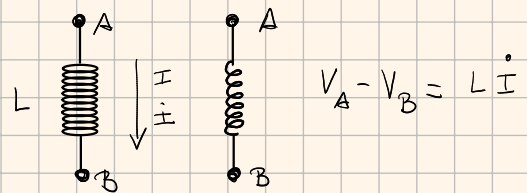
### ▶ Capacitor



### ▶ Resistencia

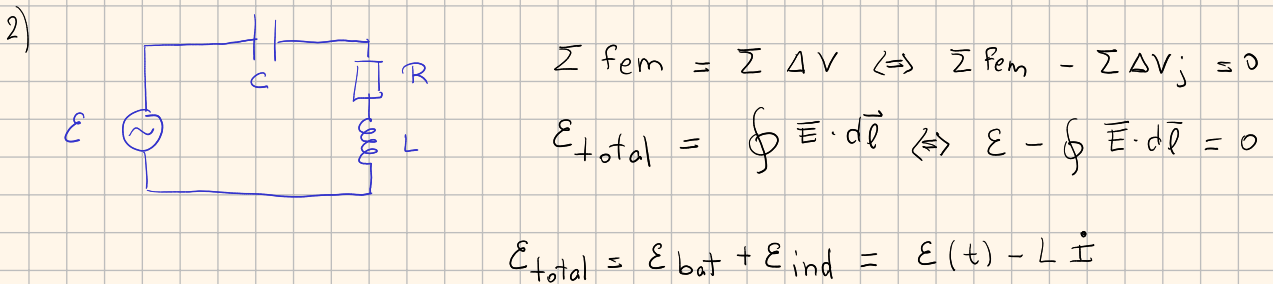
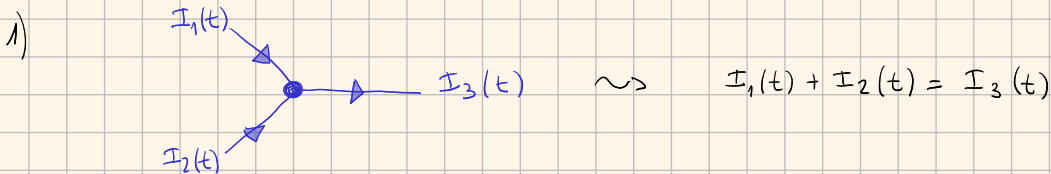


### ▶ Inductancia



## ▲ Leyes de Kirchoff

- 1) La suma algebraica de las corrientes (instantáneas) en un nodo es cero.
- 2) En un camino cerrado (malla) la suma algebraica de las fem es igual a la suma de las caídas de potencial.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{Cap}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\text{Res}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = Q/C + RI$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{E}(t) - L \dot{I}}_{\Sigma \text{ fem}} = \underbrace{Q/C + RI}_{\Sigma \Delta V} \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{E}(t)}_{\mathcal{E}} - \underbrace{L \dot{I} + RI + Q/C}_{\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \Sigma' \Delta V} = 0$$

$\hookrightarrow$  incluyendo inductancia

Teniendo en cuenta que  $\Gamma = \frac{R}{L}$  ( $Q$  indica la carga en la placa positiva del capacitor) podemos reescribir la ecuación diferencial del circuito como

$$\ddot{Q}(t) + \frac{R}{L} \dot{Q}(t) + \frac{1}{CL} Q(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{L} \quad (1)$$

La ecuación diferencial (1) es idéntica a la de un oscilador armónico amortiguado y forzado (como en F1)

$$\ddot{x}(t) + 2\Gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) \quad (2)$$

si hacemos las siguientes identificaciones:

$$\Gamma \equiv \frac{1}{2} \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{1}{CL}, \quad f(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{L}, \quad x(t) \equiv Q(t) \quad (3)$$

- Unidades:  $[R] = \Omega = \text{Volt}/\text{A}$ ,  $[L] = \text{H} = \Omega \cdot \text{seg} = \text{Volt} \cdot \text{seg}/\text{A}$ ,  $[C] = \text{Farad} = \text{A} \cdot \text{seg}/\text{Volt} = \text{seg}/\Omega$

### ► Repaso de resolución de ecuaciones diferenciales

La solución más general a (2) se compone de una parte homogénea y otra particular:

$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t) \quad (4)$$

donde  $Q_h(t)$  es solución de la ecuación homogénea

$$\ddot{Q} + 2\Gamma \dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 \quad (5)$$

y  $Q_p(t)$  es una solución de la ecuación completa (2).

#### • Solución homogénea

Propuesta  $Q_h(t) = \mathcal{A} e^{\lambda t}$  (6)  $\lambda$  queda fijado a partir de la ecuación diferencial

}  
v

$\mathcal{A}$  se fija con las condiciones iniciales

$$\dot{Q}_h = \lambda \mathcal{A} e^{\lambda t}, \quad \ddot{Q}_h = \lambda^2 \mathcal{A} e^{\lambda t}$$

reemplazando en (5) tenemos que

$$(\lambda^2 + 2\Gamma \lambda + \omega_0^2) \mathcal{A} e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\Gamma \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (7)$$

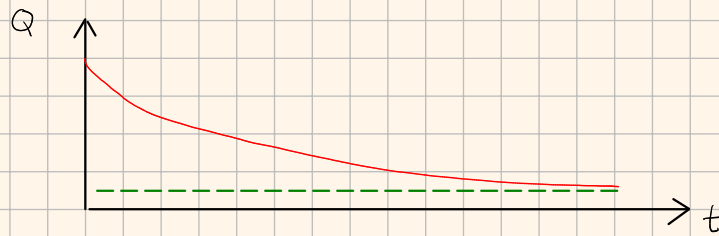
$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} = -\frac{1}{2} \frac{R}{L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}} \quad (8)$$

La solución (8) va a presentar distintos comportamiento según el discriminante de la raíz sea positivo, negativo o cero.

- *Caso sobreamortiguado*  $\Gamma^2 - \omega_0^2 > 0 \Leftrightarrow R > 2\sqrt{L/C}$

$\Rightarrow \lambda_{\pm} \in \mathbb{R}, \lambda_+ \neq \lambda_- \Rightarrow$  tenemos dos soluciones linealmente independientes

$$Q_h^{(sobre)}(t) = \alpha_1 e^{\lambda_+ t} + \alpha_2 e^{\lambda_- t} \quad (9)$$



• Caso subamortiguado  $\Gamma^2 - \omega_0^2 < 0 \Leftrightarrow R < 2\sqrt{L/C}$

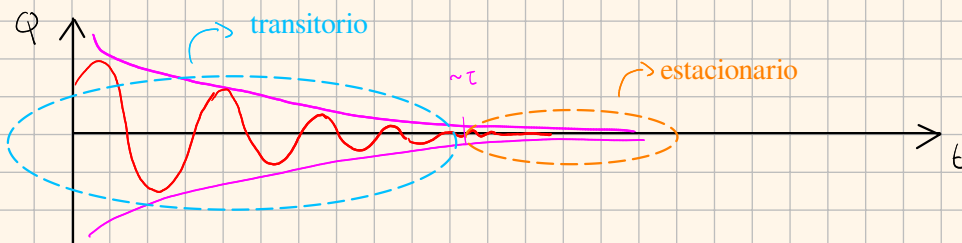
Notemos que  $\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{|\Gamma^2 - \omega_0^2|} \equiv i\omega$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} \in \mathbb{C} \quad \lambda_{\pm}^{(sub)} = -\Gamma \pm i\omega \quad (10)$$

$$\Rightarrow Q_h^{(sub)}(t) = \tilde{\alpha}_1 e^{-\Gamma t + i\omega t} + \tilde{\alpha}_2 e^{-\Gamma t - i\omega t} \quad (11)$$

Desde luego queremos soluciones reales. Entonces tomamos parte real y parte imaginaria\* de (11)

$$\begin{aligned} Q_h^{(sub)}(t) &= \alpha_1 e^{-\Gamma t} \cos(\omega t) + \alpha_2 e^{-\Gamma t} \sin(\omega t) \\ &= \alpha_3 e^{-\Gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \alpha_4 e^{-\Gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (12)$$



$$\tau/t \sim \tau \quad e^{-1} \approx 0,37$$

$$\tau/t \sim 10\tau \quad e^{-10} \approx 4,5 \times 10^{-5}$$

• Caso crítico  $\Gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow R = 2\sqrt{L/C}$

$$\Rightarrow \lambda_+ = \lambda_- = -\Gamma \in \mathbb{R}$$

(5) es una ecuación diferencial de segundo orden y necesitamos dos soluciones linealmente independientes.

Podemos probar con

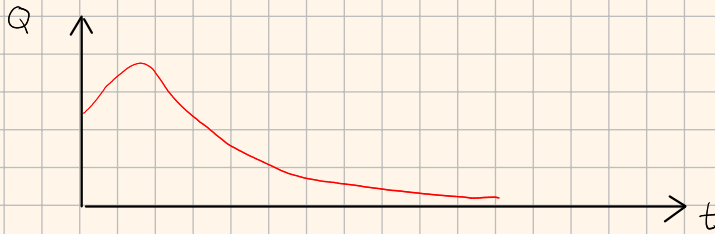
$$\begin{aligned} Q_h(t) = \tilde{\alpha} t e^{-\Gamma t} &\Rightarrow \dot{Q}_h = \tilde{\alpha} (1 - \Gamma t) e^{-\Gamma t} \\ \ddot{Q}_h &= \tilde{\alpha} \Gamma (\Gamma t - 1) e^{-\Gamma t} \end{aligned}$$

La propuesta resuelve la ecuación homogénea (5).

\* Fórmula de Euler  $e^{\pm i x} = \cos x \pm i \sin x \quad x \in \mathbb{R}$

La solución general en el caso crítico es

$$Q_h^{(crit)}(t) = eA_1 e^{-\tau t} + eA_2 t e^{-\tau t} \quad (13)$$



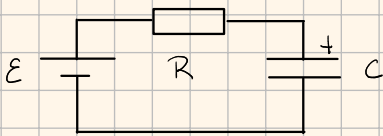
◆ Solución particular

Cualquier solución que resuelva (2). Su forma funcional va a depender de  $\epsilon(t)$ . Una propuesta que suele funcionar es imitar la forma del término inhomogéneo.

► Casos particulares

● Circuito RC

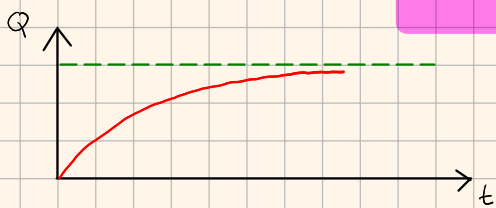
Ley de Kirchoff (voltajes)  $\epsilon = \frac{Q}{C} + RI, I = \dot{Q}$   
 $\Rightarrow \epsilon/R = Q/RC + \dot{Q}$



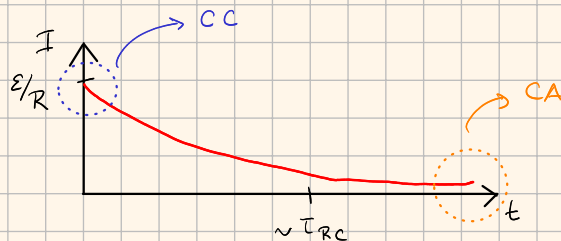
Es conveniente definir  $\tau_{RC} \equiv RC$

$$Q(t) = C\epsilon + (Q_0 - \epsilon C) e^{-t/\tau_{RC}}, \text{ cond inicial } Q(0) = Q_0$$

$$I(t) = \frac{\epsilon C - Q_0}{\tau_{RC}} e^{-t/\tau_{RC}}$$

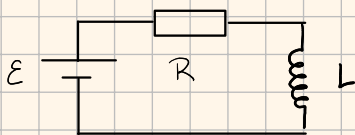


Si  $Q_0 = 0$



● Circuito RL

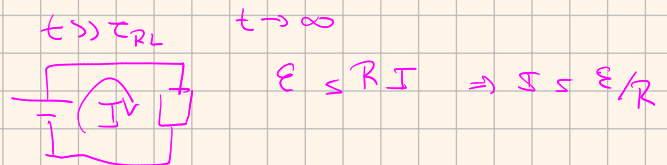
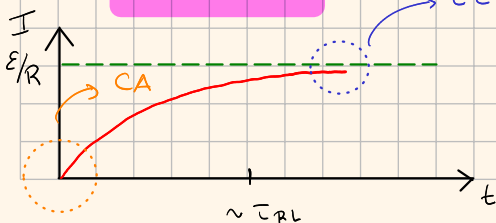
Ley de Kirchoff (voltajes)  $\epsilon + \epsilon_{ind} = \epsilon - LI' = RI$   
 $\Rightarrow \epsilon/L = R/L I + I'$



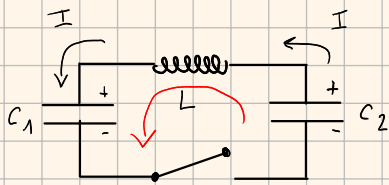
Es conveniente definir  $\tau_{RL} \equiv R/L$

$$I(t) = \frac{\epsilon}{R} + (I_0 - \frac{\epsilon}{R}) e^{-t/\tau_{RL}}, \text{ } I(t=0) = I_0$$

Si  $I_0 = 0$



► **Problema 2**



A  $t=0$  el capacitor 1 está descargado y el capacitor 2 está descargado. Las condiciones iniciales para la ecuación diferencial son

$$Q_1(0) = 0, \quad Q_2(0) = Q_0 > 0 \quad (2.1)$$

Definimos la corriente como

$$I = \dot{Q}_1, \quad I(0) = \dot{Q}_1(0) = 0 \quad (2.2)$$

ya que el capacitor 1 es el que se está cargando.

Cuando se cierre la llave la carga va a empezar a fluir desde el capacitor 2 al 1 a través de la inductancia.

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{ind} = -L \dot{I} = \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} \quad \Leftrightarrow \quad L \ddot{I} + \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{Q_2}{C_2} + L \dot{I} - \frac{Q_1}{C_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L \ddot{Q}_1 + \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

Notemos que la carga total del sistema es

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q_0 - Q_1 \quad (2.4)$$

Reemplazando este vínculo en la ecuación (2.3) tenemos que

$$L \ddot{Q}_1 + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q_1 - \frac{Q_0}{C_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{Q}_1 + \frac{1}{L C_{eq}} Q_1 = \frac{Q_0}{L C_2}, \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (2.5)$$

• **Solución homogénea**

$$Q_{1h}(t) = e^A \cos(\omega t) + e^B \sin(\omega t)$$

$$\dot{Q}_{1h}(t) = -\omega (e^A \sin(\omega t) - e^B \cos(\omega t))$$

$$\ddot{Q}_{1h}(t) = -\omega^2 (e^A \cos(\omega t) + e^B \sin(\omega t))$$

reemplazando en la ecuación diferencial (2.5)

$$\left( -\omega^2 + \frac{1}{L C_{eq}} \right) (e^A \cos \omega t + e^B \sin(\omega t)) = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{L C_{eq}} \quad (2.6)$$

• **Solución particular**

$$Q_{1p} = \text{const} \Rightarrow \frac{1}{L C_{eq}} Q_{1p} = \frac{Q_0}{L C_2} \Rightarrow Q_{1p} = \frac{C_{eq}}{C_2} Q_0 \quad (2.7)$$

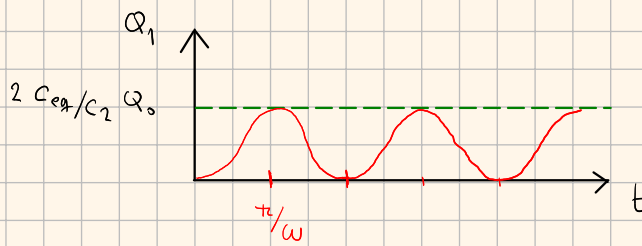
Ahora sí podemos imponer las condiciones iniciales (2.1)

$$Q_1(t) = eA \cos(\omega t) + eB \sin(\omega t) + \frac{C_{eq}}{C_2} Q_0, \quad Q_1(0) = 0, \quad \dot{Q}_1(0) = I(0) = 0$$

$$\dot{Q}_1(0) = 0 = \omega eB \Rightarrow eB = 0$$

$$Q_1(0) = 0 = eA + \frac{C_{eq}}{C_2} Q_0 \Rightarrow eA = -\frac{C_{eq}}{C_2} Q_0$$

$$\Rightarrow Q_1(t) = \frac{C_{eq}}{C_2} Q_0 (1 - \cos(\omega t)) \quad (2.8)$$

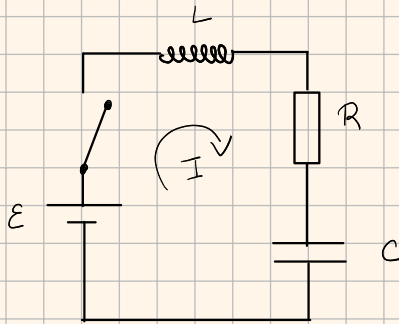


$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$

$$Q_2 = Q_0 - Q_1$$

#### ► Problema 4

Datos:  $\varepsilon = 400V$ ,  $L = 2H$ ,  $R = 20\Omega$ ,  $C = 8\mu F$



Utilizando la ley de Kirchoff de voltajes

$$\varepsilon = \frac{1}{C} Q + RI + L \dot{I}$$

$$I = \dot{Q} \quad \varphi = eA e^{\lambda t}$$

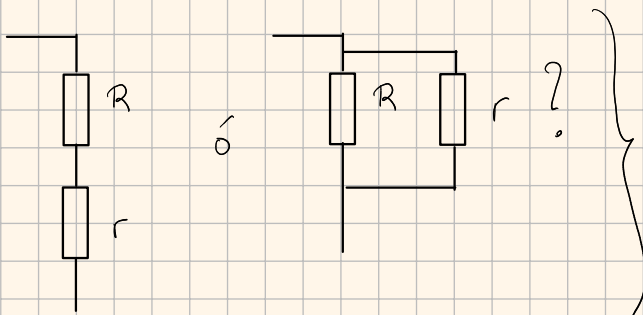
$$\Rightarrow \ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{CL} Q = \frac{\varepsilon}{L} = \text{const} \quad (4.1)$$

Ya vimos cómo resolver este problema, lo que debemos chequear es si el discriminante es positivo, negativo o cero.

$$\lambda_{\pm} = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \Gamma = \frac{1}{2} \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{CL}$$

$$Q_h(t) = eA_1 e^{\lambda_+ t} + eA_2 e^{\lambda_- t}, \quad Q_p = \text{const}$$

Cómo obtener un comportamiento crítico añadiendo una resistencia?



$$\Gamma'^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \text{con} \quad \Gamma' = \frac{R_{eq}}{L}$$