

PROBLEMA 12 - GUIA 5



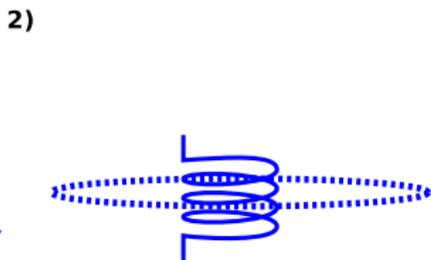
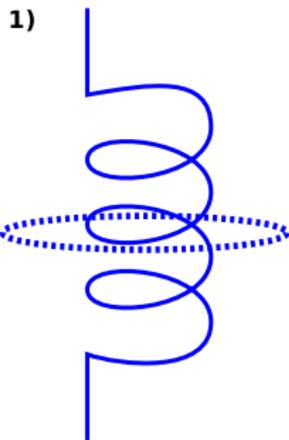
universidad de buenos aires - exactas
departamento de Física

8 de noviembre de 2021

PROBLEMA 12

Calcule M_{12} y M_{21} entre una espira circular de radio R_2 y un solenoide finito de longitud L , radio R_1 (suponga $R_1 \ll L$ y $R_1 \ll R_2$), y número de vueltas N_1 dispuestos de tal forma que los centros y los ejes de ambos son coincidentes. Utilice las aproximaciones que crea necesarias y diga cuál de los dos resultados es más confiable cuando L es chico con respecto a R_2 .

Vamos a distinguir dos casos:



① $R_1 \ll R_2 \ll L$

En este caso vale la aproximación de solenoide infinito.

② $R_1 \ll L \ll R_2$

En este caso NO vale la aproximación de solenoide infinito.

Empecemos por un cálculo que será igual para ambas aproximaciones.
Recordemos la expresión para M_{12} :

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \int \int_{S_{\text{sol}}} \vec{B}_{\text{espira}} \cdot d\vec{S}_{\text{sol}}$$

Empecemos por un cálculo que será igual para ambas aproximaciones. Recordemos la expresión para M_{12} :

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \int \int_{S_{\text{sol}}} \vec{B}_{\text{espira}} \cdot d\vec{S}_{\text{sol}}$$

En todos los casos $R_1 \ll R_2$ y por lo tanto el campo de la espira que atraviesa el interior del solenoide se puede aproximar por el campo de la espira en el eje z :

$$\vec{B}_{\text{esp}}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Empecemos por un cálculo que será igual para ambas aproximaciones. Recordemos la expresión para M_{12} :

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \int \int_{S_{\text{sol}}} \vec{B}_{\text{espira}} \cdot d\vec{S}_{\text{sol}}$$

En todos los casos $R_1 \ll R_2$ y por lo tanto el campo de la espira que atraviesa el interior del solenoide se puede aproximar por el campo de la espira en el eje z :

$$\vec{B}_{\text{esp}}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

El flujo del campo de la espira a través de una espira del solenoide es:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} r dr d\phi \hat{z} = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}} \pi R_1^2$$

Empecemos por un cálculo que será igual para ambas aproximaciones. Recordemos la expresión para M_{12} :

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \int \int_{S_{\text{sol}}} \vec{B}_{\text{espira}} \cdot d\vec{S}_{\text{sol}}$$

En todos los casos $R_1 \ll R_2$ y por lo tanto el campo de la espira que atraviesa el interior del solenoide se puede aproximar por el campo de la espira en el eje z :

$$\vec{B}_{\text{esp}}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

El flujo del campo de la espira a través de una espira del solenoide es:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} r dr d\phi \hat{z} = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}} \pi R_1^2$$

El flujo total del campo de la espira que atraviesa el solenoide es:

$$\Phi_{12} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{N_1}{L} \frac{\mu_0 I_2 R_2^2 \pi R_1^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2 \pi R_1^2 N_1}{2LR_2^2} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

De esta manera se obtiene:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2L} \frac{L}{\sqrt{L^2/4 + R_2^2}} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

De esta manera se obtiene:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2L} \frac{L}{\sqrt{L^2/4 + R_2^2}} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Y finalmente obtenemos:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Hasta aquí sólo usamos la aproximación $R_1 \ll R_2$, ahora vamos a usar la aproximación 1) $R_2 \ll L$:

De esta manera se obtiene:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2L} \frac{L}{\sqrt{L^2/4 + R_2^2}} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Y finalmente obtenemos:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Hasta aquí sólo usamos la aproximación $R_1 \ll R_2$, ahora vamos a usar la aproximación 1) $R_2 \ll L$:

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{L}$$

De esta manera se obtiene:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2L} \frac{L}{\sqrt{L^2/4 + R_2^2}} = \frac{\mu_0 I_2 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Y finalmente obtenemos:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Hasta aquí sólo usamos la aproximación $R_1 \ll R_2$, ahora vamos a usar la aproximación 1) $R_2 \ll L$:

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{L}$$

Ahora siguiendo dentro de la aproximación 1), es decir, que podemos considerar al solenoide como infinito calculamos M_{21} :

$$\Phi_{21} = \int \int_{S_{\text{esp}}} \vec{B}_{\text{sol}} \cdot d\vec{S}_{\text{esp}} = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{L} \pi R_1^2$$

Recordemos que el campo del solenoide es nulo fuera del solenoide.

Y de esta manera obtenemos:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{L}$$

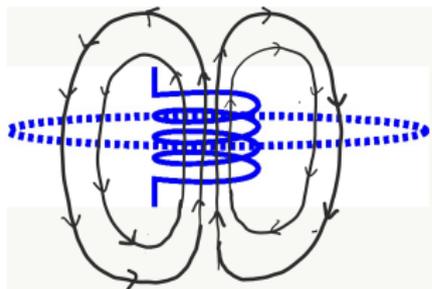
Es decir que en esta aproximación obtenemos $M_{12} = M_{21}$. Vamos a hacer el cálculo ahora con la aproximación $2L \ll R_2$.

Y de esta manera obtenemos:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{L}$$

Es decir que en esta aproximación obtenemos $M_{12} = M_{21}$. Vamos a hacer el cálculo ahora con la aproximación $2L \ll R_2$.

Recordemos el resultado que ya calculamos:



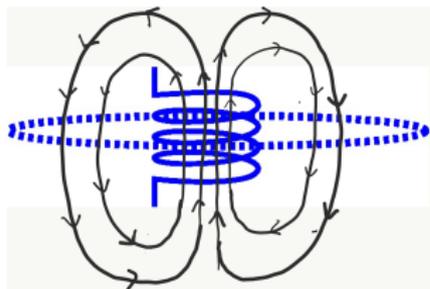
$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\int \int_{S_{\text{sol}}} \vec{B}_{\text{esp}} \cdot d\vec{S}_{\text{sol}}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Y de esta manera obtenemos:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{L}$$

Es decir que en esta aproximación obtenemos $M_{12} = M_{21}$. Vamos a hacer el cálculo ahora con la aproximación $2L \ll R_2$.

Recordemos el resultado que ya calculamos:



$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\int \int_{S_{\text{sol}}} \vec{B}_{\text{esp.}} \cdot d\vec{S}_{\text{sol}}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Ahora vamos

a hacer la aproximación $L \ll R_2$ y obtenemos:

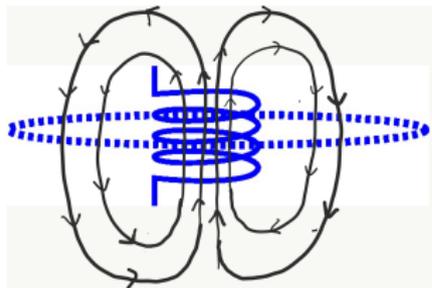
$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2R_2}$$

Y de esta manera obtenemos:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{L}$$

Es decir que en esta aproximación obtenemos $M_{12} = M_{21}$. Vamos a hacer el cálculo ahora con la aproximación $2L \ll R_2$.

Recordemos el resultado que ya calculamos:



$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\int \int_{S_{\text{sol}}} \vec{B}_{\text{esp}} \cdot d\vec{S}_{\text{sol}}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2\sqrt{L^2/4 + R_2^2}}$$

Ahora vamos

a hacer la aproximación $L \ll R_2$ y obtenemos:

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2R_2}$$

Para calcular $M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$ el campo que pasa a través de la espira se puede aproximar como el campo del solenoide finito sobre el eje z. Sin embargo en este caso no se están incluyendo las líneas de campo del solenoide que pasan por afuera del solenoide y a través de la espira.

El campo del solenoide finito sobre el eje z se puede escribir como:

$$\vec{B}_{\text{sol}}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z - L/2)^2}} \right]$$

Para calcular el flujo del campo del solenoide que pasa por la espira:

$$\Phi_{21} = \vec{B}_{\text{sol}}(0, 0, 0) \pi R_1^2 = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L} \left(\frac{L}{\sqrt{R_1^2 + L^2/4}} \right) \pi R_1^2$$

Recordemos que en la aproximación que estamos usando el campo magnético es 0 fuera del solenoide.

El campo del solenoide finito sobre el eje z se puede escribir como:

$$\vec{B}_{\text{sol}}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z - L/2)^2}} \right]$$

Para calcular el flujo del campo del solenoide que pasa por la espira:

$$\Phi_{21} = \vec{B}_{\text{sol}}(0, 0, 0) \pi R_1^2 = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L} \left(\frac{L}{\sqrt{R_1^2 + L^2/4}} \right) \pi R_1^2$$

Recordemos que en la aproximación que estamos usando el campo magnético es 0 fuera del solenoide. De esta manera obtenemos:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{2L} \left(\frac{L}{\sqrt{R_1^2 + L^2/4}} \right) = \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{2\sqrt{R_1^2 + L^2/4}}$$

El campo del solenoide finito sobre el eje z se puede escribir como:

$$\vec{B}_{\text{sol}}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z - L/2)^2}} \right]$$

Para calcular el flujo del campo del solenoide que pasa por la espira:

$$\Phi_{21} = \vec{B}_{\text{sol}}(0, 0, 0) \pi R_1^2 = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L} \left(\frac{L}{\sqrt{R_1^2 + L^2/4}} \right) \pi R_1^2$$

Recordemos que en la aproximación que estamos usando el campo magnético es 0 fuera del solenoide. De esta manera obtenemos:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{2L} \left(\frac{L}{\sqrt{R_1^2 + L^2/4}} \right) = \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{2\sqrt{R_1^2 + L^2/4}}$$

Ahora tomamos la aproximación $R_1 \ll L$ y obtenemos:

$$M_{21} \simeq \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{L}$$

Recordemos ahora que bajo la aproximación 2 obtuvimos:

$$M_{21} \simeq \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{L}$$

y

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2R_2}$$

Es decir que bajo esta aproximación $M_{12} \neq M_{21}$.Cuál aproximación será mejor?

Recordemos ahora que bajo la aproximación 2 obtuvimos:

$$M_{21} \simeq \frac{\mu_0 N_1 \pi R_1^2}{L}$$

y

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1}{2R_2}$$

Es decir que bajo esta aproximación $M_{12} \neq M_{21}$. Cuál aproximación será mejor?

Evidentemente M_{12} ya que en el cálculo de M_{21} no se incluyeron en el flujo las líneas de campo que pasan por fuera del solenoide y por eso resulta $M_{21} > M_{12}$

