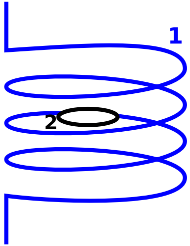
Clase 20: Inducción y Circuito RL

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

8 de noviembre de 2021

Problema 7

Un solenoide tiene 1000 vueltas, 20 cm de diámetro y 40 cm de largo. En su centro se ubica coaxialmente otro solenoide de 100 vueltas, 4 cm de diámetro y longitud despreciable, cuya resistencia vale $50\,\Omega$. Inicialmente circulan 5 A por el solenoide exterior, luego se reduce linealmente la corriente a 1 A en 0,5 s. Calcular la corriente que se induce en el solenoide interior, cuya auto-inductancia es L.

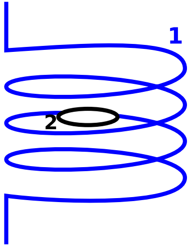


Resumiendo los datos del problema:

$$N_1 = 1000 \qquad R_1 = 0{,}10\,\mathrm{m} \qquad L_1 = 0{,}40\,\mathrm{m}$$
$$N_2 = 100 \qquad R_2 = 0{,}02\,\mathrm{m} \qquad L_2 \simeq 0\,\mathrm{m}$$

Problema 7

Un solenoide tiene 1000 vueltas, 20 cm de diámetro y 40 cm de largo. En su centro se ubica coaxialmente otro solenoide de 100 vueltas, 4 cm de diámetro y longitud despreciable, cuya resistencia vale $50\,\Omega$. Inicialmente circulan 5 A por el solenoide exterior, luego se reduce linealmente la corriente a 1 A en 0,5 s. Calcular la corriente que se induce en el solenoide interior, cuya auto-inductancia es L.



Resumiendo los datos del problema:

$$N_1 = 1000 \qquad R_1 = 0{,}10\,\mathrm{m} \qquad L_1 = 0{,}40\,\mathrm{m}$$
$$N_2 = 100 \qquad R_2 = 0{,}02\,\mathrm{m} \qquad L_2 \simeq 0\,\mathrm{m}$$

A su vez:

$$I_1(t=0) = 5A = I_0 \qquad I_1(t=0{,}5\mathrm{seg}) = 1A$$

Podemos escribir:

$$I_1(t) = I_0 - \alpha t \qquad \alpha = \frac{1A - 5A}{0{,}5\,\mathrm{seg}} = -8A\,\mathrm{seg}^{-1}$$

Podemos escribir:

$$I_1(t) = I_0 - \alpha t \qquad \alpha = \frac{1A - 5A}{0{,}5\,\mathrm{seg}} = -8A\,\mathrm{seg}^{-1}$$

Como consecuencia de la variación en la corriente del solenoide exterior, hay una variación de flujo de campo magnético en el solenoide interior lo cual inducirá una f.e.m:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_T}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_{12} + \Phi_{22})$$

donde

- Φ_{12} es el flujo del solenoide externo (1) que está atravesando el solenoide interno (2),
- Φ_{22} es el flujo del solenoide interno (2) que atraviesa al mismo solenoide

Calculamos Φ_{12}:

$$\Phi_{12} = \int\int_{S_2} \vec{B}_1 \, . \, d\vec{S}_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} \vec{B}_1 . r dr d\phi \hat{z}$$

Como $R_2 << R_1$ puedo proximar el campo del solenoide **exterior** adentro del solenoide interior como el campo del solenoide **exterior** en el eje z. El campo del solenoide finito sobre el eje z se puede escribir como:

$$\vec{B}_{\text{sol}}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z - L/2)^2}} \right]$$

Calculamos Φ_{12}:

$$\Phi_{12} = \int\int_{S_2} \vec{B}_1 \,.\, d\vec{S}_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_2} \vec{B}_1 . r dr d\phi \hat{z}$$

Como $R_2 << R_1$ puedo proximar el campo del solenoide **exterior** adentro del solenoide interior como el campo del solenoide **exterior** en el eje z. El campo del solenoide finito sobre el eje z se puede escribir como:

$$\vec{B}_{\rm sol}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L}\left[\frac{z+L/2}{\sqrt{R_1^2+(z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{R_1^2+(z-L/2)^2}}\right]$$

Por lo tanto, el campo en $\vec{r} = (0,0,0)$:

$$\vec{B}_1(0,0,0) = \frac{\mu_0 I_1 n_1}{2}\frac{L_1}{\sqrt{R_1^2+L_1^2/4}}\hat{z}$$

Calculamos Φ_{12}:

$$\Phi_{12} = \int\int_{S_2} \vec{B}_1 \,.\, d\vec{S}_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_2} \vec{B}_1 . r dr d\phi \hat{z}$$

Como $R_2 << R_1$ puedo proximar el campo del solenoide **exterior** adentro del solenoide interior como el campo del solenoide **exterior** en el eje z. El campo del solenoide finito sobre el eje z se puede escribir como:

$$\vec{B}_{\text{sol}}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2L}\left[\frac{z + L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z+L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R_1^2 + (z-L/2)^2}}\right]$$

Por lo tanto, el campo en $\vec{r} = (0,0,0)$:

$$\vec{B}_1(0,0,0) = \frac{\mu_0 I_1 n_1}{2}\frac{L_1}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2/4}}\hat{z}$$

Ahora calculamos el flujo en del solenoide interior:

$$\Phi_{12} = N_2 \pi R_2^2 \frac{\mu_0 I_1 n_1 L_1}{2\sqrt{R_1^2 + L_1^2/4}} = I_1 M_{12}$$

y por lo tanto:

$$M_{12} = \frac{N_2 \pi R_2^2\, \mu_0 n_1 L_1}{2\sqrt{R_1^2 + L_1^2/4}}$$

y por lo tanto:

$$M_{12} = \frac{N_2 \pi R_2^2 \, \mu_0 n_1 L_1}{2\sqrt{R_1^2 + L_1^2/4}}$$

A su vez:

$$-\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt} M_{12} I_1 = -M_{12} \dot{I}_1 = -\alpha M_{12}$$

y por lo tanto:

$$M_{12} = \frac{N_2 \pi R_2^2 \, \mu_0 n_1 L_1}{2\sqrt{R_1^2 + L_1^2/4}}$$

A su vez:

$$-\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt} M_{12} I_1 = -M_{12}\dot{I}_1 = -\alpha M_{12}$$

Calculamos ahora $-\frac{d\Phi_{22}}{dt}$:

$$\Phi_{22} = L I_2$$

donde L es la autoinductancia del solenoide 2. Y por lo tanto

$$-\frac{d\Phi_{22}}{dt} = -L\frac{dI_2}{dt} = -L\dot{I}_2$$

y por lo tanto:

$$M_{12} = \frac{N_2 \pi R_2^2 \, \mu_0 n_1 L_1}{2\sqrt{R_1^2 + L_1^2/4}}$$

A su vez:

$$-\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt} M_{12} I_1 = -M_{12} \dot{I}_1 = -\alpha M_{12}$$

Calculamos ahora $-\frac{d\Phi_{22}}{dt}$:

$$\Phi_{22} = L I_2$$

donde L es la autoinductancia del solenoide 2. Y por lo tanto

$$-\frac{d\Phi_{22}}{dt} = -L \frac{dI_2}{dt} = -L\dot{I}_2$$

De esta manera obtenemos:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} - \frac{d\Phi_{22}}{dt} = -\alpha M_{12} - L\dot{I}_2$$

Veamos ahora la ecuación que debe cumplir la corriente I_2, teniendo en cuenta que el solenoide 2 tiene resistencia $\mathcal{R}$:

$$\epsilon = -\alpha M_{12} - L\dot{I}_2 = \mathcal{R} I_2$$

Veamos ahora la ecuación que debe cumplir la corriente I_2, teniendo en cuenta que el solenoide 2 tiene resistencia $\mathcal{R}$:

$$\epsilon = -\alpha M_{12} - L\dot{I}_2 = \mathcal{R} I_2$$

Podemos escribir esta ecuación de la siguiente manera:

$$\dot{I}_2 + \frac{\mathcal{R}}{L} I_2 = -\frac{\alpha M_{12}}{L}$$

Veamos ahora la ecuación que debe cumplir la corriente I_2, teniendo en cuenta que el solenoide 2 tiene resistencia $\mathcal{R}$:

$$\epsilon = -\alpha M_{12} - L\dot{I}_2 = \mathcal{R} I_2$$

Podemos escribir esta ecuación de la siguiente manera:

$$\dot{I}_2 + \frac{\mathcal{R}}{L} I_2 = -\frac{\alpha M_{12}}{L}$$

Tenemos una ecuación diferencial a primer orden no homogénea. La solución será:

$$I_2(t) = I_H(t) + I_p$$

donde con $I_H(t)$ es la solución de la ecuación homogénea e I_p es solución de la ecuación particular.

Veamos ahora la ecuación que debe cumplir la corriente I_2, teniendo en cuenta que el solenoide 2 tiene resistencia $\mathcal{R}$:

$$\epsilon = -\alpha M_{12} - L\dot{I}_2 = \mathcal{R} I_2$$

Podemos escribir esta ecuación de la siguiente manera:

$$\dot{I}_2 + \frac{\mathcal{R}}{L} I_2 = -\frac{\alpha M_{12}}{L}$$

Tenemos una ecuación diferencial a primer orden no homogénea. La solución será:

$$I_2(t) = I_H(t) + I_p$$

donde con $I_H(t)$ es la solución de la ecuación homogénea e I_p es solución de la ecuación particular. A su vez:

$$\begin{aligned} I_H(t) &= A_0 \exp(\lambda t) \\ \dot{I}_H(t) &= A_0 \lambda \exp(\lambda t) \end{aligned}$$

Para que $I_H(t)$ sea solución de la ecuación homogénea:

$$A_0\lambda \exp{(\lambda t)} + \frac{\mathcal{R}}{L} A_0 \exp{(\lambda t)} = (\lambda + \frac{\mathcal{R}}{L}) A_0 \exp{(\lambda t)} = 0$$

Para que $I_H(t)$ sea solución de la ecuación homogénea:

$$A_0 \lambda \exp(\lambda t) + \frac{\mathcal{R}}{L} A_0 \exp(\lambda t) = (\lambda + \frac{\mathcal{R}}{L}) A_0 \exp(\lambda t) = 0$$

Y por lo tanto $\lambda = -\frac{\mathcal{R}}{L}$. La solución particular va a tener la misma forma funcional que el término no homogéneo de la ecuación, es decir, como el término no homogéneo es una constante la solución particular será una constante.

Para que $I_H(t)$ sea solución de la ecuación homogénea:

$$A_0 \lambda \exp{(\lambda t)} + \frac{\mathcal{R}}{L} A_0 \exp{(\lambda t)} = (\lambda + \frac{\mathcal{R}}{L}) A_0 \exp{(\lambda t)} = 0$$

Y por lo tanto $\lambda = -\frac{\mathcal{R}}{L}$. La solución particular va a tener la misma forma funcional que el término no homogéneo de la ecuación, es decir, como el término no homogéneo es una constante la solución particular será una constante. De manera que la solución $I_2(t) = A \exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L})} + B$ con $B = \text{cte}$ debe satisfacer la ecuación completa y por lo tanto:

$$-\frac{\mathcal{R}}{L} A_0 \exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L} t)} + \frac{\mathcal{R}}{L}(A_0 \exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L} t)} + B) = -\frac{\alpha M_{12}}{L}$$

Para que $I_H(t)$ sea solución de la ecuación homogénea:

$$A_0\lambda\exp(\lambda t) + \frac{\mathcal{R}}{L}A_0\exp(\lambda t) = (\lambda + \frac{\mathcal{R}}{L})A_0\exp(\lambda t) = 0$$

Y por lo tanto $\lambda = -\frac{\mathcal{R}}{L}$. La solución particular va a tener la misma forma funcional que el término no homogéneo de la ecuación, es decir, como el término no homogéneo es una constante la solución particular será una constante. De manera que la solución $I_2(t) = A\exp-(\frac{\mathcal{R}}{L}) + B$ con $B =$cte debe satisfacer la ecuación completa y por lo tanto:

$$-\frac{\mathcal{R}}{L}A_0\exp-(\frac{\mathcal{R}}{L}t) + \frac{\mathcal{R}}{L}(A_0\exp-(\frac{\mathcal{R}}{L}t) + B) = -\frac{\alpha M_{12}}{L}$$

Y por lo tanto $B = -\frac{\alpha M_{12}}{\mathcal{R}}$ y $I_2(t) = A_0\exp-(\frac{\mathcal{R}}{L}t) + B$. Ahora solo falta determinar A_0 a partir de las condiciones iniciales, en este caso $I_2(t=0) = 0$:

$$A_0 - \frac{\alpha M_{12}}{\mathcal{R}} = 0$$

Para que $I_H(t)$ sea solución de la ecuación homogénea:

$$A_0\lambda \exp{(\lambda t)} + \frac{\mathcal{R}}{L} A_0 \exp{(\lambda t)} = (\lambda + \frac{\mathcal{R}}{L}) A_0 \exp{(\lambda t)} = 0$$

Y por lo tanto $\lambda = -\frac{\mathcal{R}}{L}$. La solución particular va a tener la misma forma funcional que el término no homogéneo de la ecuación, es decir, como el término no homogéneo es una constante la solución particular será una constante. De manera que la solución $I_2(t) = A \exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L})} + B$ con $B = \mathrm{cte}$ debe satisfacer la ecuación completa y por lo tanto:

$$-\frac{\mathcal{R}}{L} A_0 \exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L} t)} + \frac{\mathcal{R}}{L}(A_0 \exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L} t)} + B) = -\frac{\alpha M_{12}}{L}$$

Y por lo tanto $B = -\frac{\alpha M_{12}}{\mathcal{R}}$ y $I_2(t) = A_0 \exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L} t)} + B$. Ahora solo falta determinar A_0 a partir de las condiciones iniciales, en este caso $I_2(t = 0) = 0$:

$$A_0 - \frac{\alpha M_{12}}{\mathcal{R}} = 0$$

De esta manera finalmente obtenemos:

$$I_2(t) = \frac{\alpha M_{12}}{\mathcal{R}} (\exp{-(\frac{\mathcal{R}}{L} t)} - 1)$$