Clase 18: Ley de Faraday

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

24 de noviembre de 2021

Esquema de la clase de hoy

- Ley de Faraday
- Ley de Lenz
- Ej 1 y Ej. 5 Guia 5

Ley de Faraday

Se define la fuerza electromotriz (f.e.m) en un circuito

$$\epsilon = \oint \vec{E}.\vec{dl} \tag{1}$$

En el caso de que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ sean estáticos, esta f.e.m es siempre 0. Faraday realizó una serie de experimentos, de los cuales infirió que:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donde $\Phi = \int\int \vec{B}.\,d\vec{S}$ es el flujo de campo magnético y por lo tanto se puede escribir:

$$\oint \vec{E}.\vec{dl} \;\; = \;\; -\frac{d}{dt}\int\int \vec{B}.\,d\vec{S} \tag{2}$$

Ley de Faraday

Se define la fuerza electromotriz (f.e.m) en un circuito

$$\epsilon = \oint \vec{E}.\vec{dl} \tag{1}$$

En el caso de que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ sean estáticos, esta f.e.m es siempre 0. Faraday realizó una serie de experimentos, de los cuales infirió que:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donde $\Phi = \int\int \vec{B}.\,d\vec{S}$ es el flujo de campo magnético y por lo tanto se puede escribir:

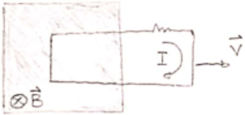
$$\oint \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\int\int \vec{B}.\,d\vec{S} \tag{2}$$

$$\int\int \vec{\nabla}\times\vec{E}.d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int\int \vec{B}.\,d\vec{S} \tag{3}$$

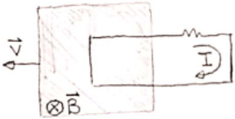
con lo cual finalmente se obtiene la Ley de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

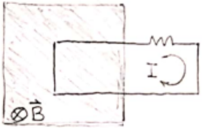
(1)



(2)



(3)

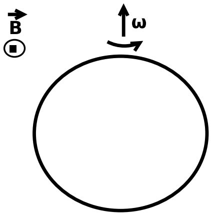


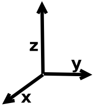
$\vec{B} = \vec{B}(t)$

Problema 1

Una espira circular de 100 cm^2 de area está colocada en un campo magnético uniforme de 0,01 T y rota 10 veces por segundo en torno de uno de sus diámetros que es normal a la dirección del campo. Calcular:

1. La f.e.m. inducida en la espira, en función del tiempo t y en particular cuando su normal forma un ángulo de 45° con el campo
2. La f.e.m. máxima y mínima y los valores de t para que aparezcan estas f.e.m.



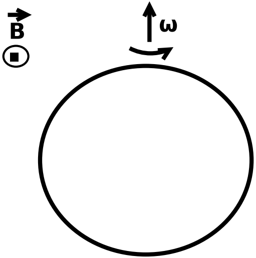


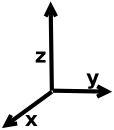
$$\vec{B} = B_0 \hat{x} \qquad B_0 = 0{,}01\,\mathrm{T}$$

$$R = \sqrt{\frac{100\,\mathrm{cm}^2}{\pi}} \qquad \omega = 2\pi\, 10\,\mathrm{seg}^{-1}$$

Problema 1

Este caso corresponde a un campo magnético estático que está atravesando una superficie variable con el tiempo.

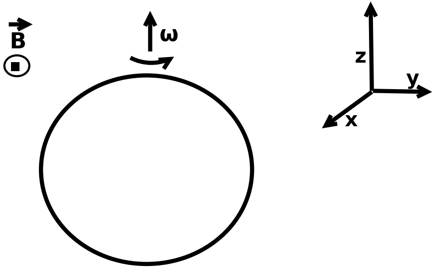




$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\int \vec{B}.d\vec{S}$$

Problema 1

Este caso corresponde a un campo magnético estático que está atravesando una superficie variable con el tiempo.



$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\int \vec{B}.d\vec{S}$$

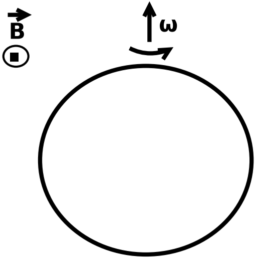
La mejor manera de describir la superficie variable es mediante un sistema solidario a la espira y considerando coordenadas cilíndricas:

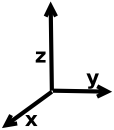
$$\vec{S} = \pi R^2 \hat{\rho}$$

donde $\hat{\rho} = (\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$.

Problema 1

Este caso corresponde a un campo magnético estático que está atravesando una superficie variable con el tiempo.





$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\int \vec{B}.d\vec{S}$$

La mejor manera de describir la superficie variable es mediante un sistema solidario a la espira y considerando coordenadas cilíndricas:

$$\vec{S} = \pi R^2 \hat{\rho}$$

donde $\hat{\rho} = (\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$.Y de esta manera calculamos el flujo de $\vec{B}$:

$$\phi = \int\int \vec{B}.d\vec{S} = \vec{B}\,.\,\vec{S} = B_0\,\hat{x}\,.\,\pi\,R^2\,\hat{\rho} = B_0\,\pi\,R^2\,\cos\omega t$$

Problema 1

De esta manera podemos calcular la f.e.m:

$$\epsilon(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} B_0\, \pi\, R^2\, \cos \omega t = B_0\, \omega\, \pi\, R^2\, \sin \omega t$$

Cuando la normal a la espira forma un ángulo de 45° con el campo,

$$\hat{\rho}.\hat{x} = \cos \omega t = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto la f.e.m. correspondiente resulta:

$$\epsilon = B_0\, \omega\, \pi\, R^2\, \frac{\sqrt{2}}{2} = 44{,}4\, \mathrm{T}\, \mathrm{cm}^2\, \mathrm{seg}^{-1} = 4{,}44 \times 10^{-3} \mathrm{T}\, \mathrm{m}^2\, \mathrm{seg}^{-1}$$

Recordemos que $1\, \mathrm{T} = \mathrm{N}\, \mathrm{m}^{-1} \mathrm{A}^{-1}$ y por lo tanto obtenemos:

$$\epsilon = 4{,}44 \times 10^{-3} \mathrm{N}\, \mathrm{m}\, \mathrm{A}^{-1}\, \mathrm{seg}^{-1} = 4{,}44 \times 10^{-3} \mathrm{J}\, \mathrm{C}^{-1} = 4{,}44 \times 10^{-3} \mathrm{V}$$

Ley de Lenz

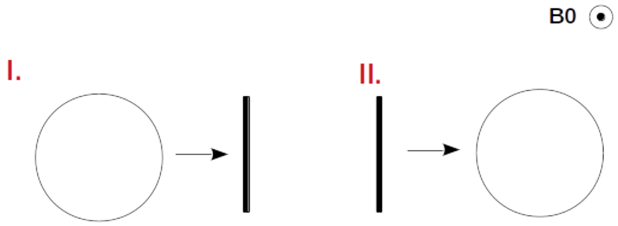
Habíamos visto que

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\int \vec{B}.d\vec{S}$$

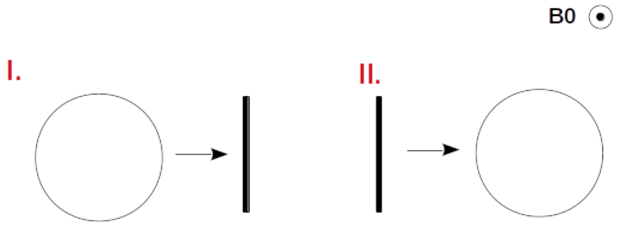
pero a veces no es obvio generar una intuición sobre el sentido de la corriente inducida por la f.e.m.. La ley de Lenz establece una regla que nos permite anticipar el sentido de la corriente inducida a partir de la f.e.m. dada por la ley de Faraday.

Ley de Lenz: La corriente inducida por la f.e.m. se opone al cambio de flujo del campo magnético sobre un lazo cerrado.

Ley de Lenz



Ley de Lenz



I) El flujo en la espira disminuye, por lo que se induce una corriente de forma tal que se compense esa disminución del flujo. O sea, se genera una corriente en sentido **antihorario** si miramos la espira "de frente".

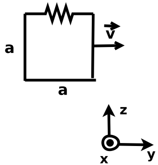
II) El flujo en la espira aumenta, por lo que se induce una corriente de forma tal que se compense el aumento del flujo. Esto es, se genera una corriente en sentido **horario** si miramos la espira "de frente".

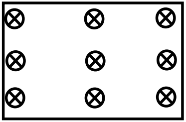
Ley de Lenz

A su vez, es importante entender la relación entre el signo de la f.e.m, la normal y la corriente inducida. Una vez definida una normal:

- Si el signo de la f.e.m inducida es positiva, la corriente inducida tendrá la misma dirección que la normal.
- Si el signo de la f.e.m inducida es negativo, la corriente inducida tendrá la dirección opuesta a la normal.

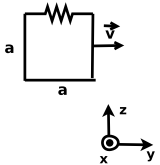
Ejemplo1

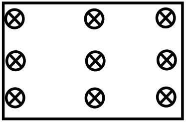




Una espira cuadrada de lado a y resistencia R se mueve con velocidad constante $\vec{v} = v_0\hat{y}$. En $t = 0$ entra en una región donde se halla un campo magnético uniforme $\vec{B} = -B_0\hat{x}$.

Ejemplo1





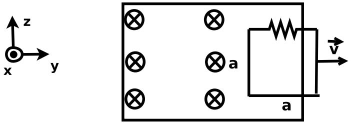
Una espira cuadrada de lado a y resistencia R se mueve con velocidad constante $\vec{v} = v_0\hat{y}$. En $t = 0$ entra en una región donde se halla un campo magnético uniforme $\vec{B} = -B_0\hat{x}$. Elijo la normal: $\hat{x}$

$$\phi = \int_0^a \int_0^{vt} -B_0\hat{x} \cdot dydz\,\hat{x} = -B_0avt$$

y entonces la f.e.m:

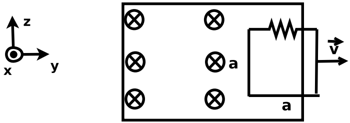
$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = B_0av$$

En este caso la f.e.m es positiva, y por lo tanto la corriente inducida va a tener la misma dirección que la normal, es decir antihoraria.



Una espira cuadrada de lado a y resistencia R se halla en una región con un campo magnético uniforme $\vec{B} = -B_0\hat{x}$ y se mueve con velocidad constante $\vec{v} = v_0\hat{y}$. En $t = 0$ la espira comienza a salir de la región donde hay campo magnético. .

Ejemplo2



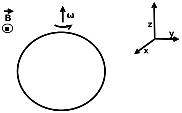
Una espira cuadrada de lado a y resistencia R se halla en una región con un campo magnético uniforme $\vec{B} = -B_0\hat{x}$ y se mueve con velocidad constante $\vec{v} = v_0\hat{y}$. En $t = 0$ la espira comienza a salir de la región donde hay campo magnético. . Elijo la normal: $\hat{x}$

$$\phi = \int_0^a \int_0^{a-vt} -B_0\hat{x}\cdot dydz\,\hat{x} = -B_0 a(a-vt)$$

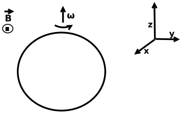
y entonces la f.e.m:

$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 a v$$

En este caso la f.e.m es negativa, y por lo tanto la corriente inducida va a tener la dirección opuesta a la normal, es decir horaria.



Veamos ahora como entender el resultado obtenido en el problema 1 de la Guia 5 donde $\epsilon \sim \sin(\omega t)$. Para hablar de corriente inducida, tenemos que asumir que la espira tiene una resistencia R

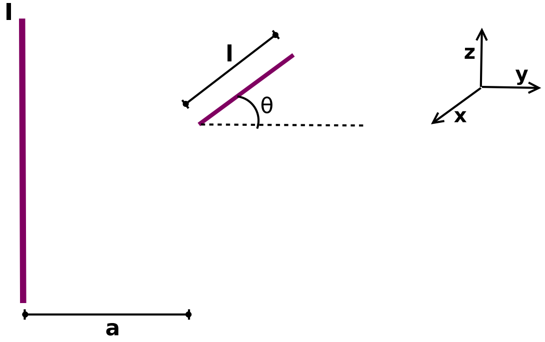


Veamos ahora como entender el resultado obtenido en el problema 1 de la Guia 5 donde $\epsilon \sim \sin(\omega t)$. Para hablar de corriente inducida, tenemos que asumir que la espira tiene una resistencia R

- Entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ la normal tiene dirección $\hat{x}$ y la fem es positiva, por lo tanto la dirección de la corriente inducida será igual a la normal, es decir antihoraria.
- Entre $\frac{\pi}{2}$ y π la normal tiene dirección $-\hat{x}$ y la fem es positiva, por lo tanto la dirección de la corriente inducida será opuesta a la normal, es decir horaria.
- Entre π y $\frac{3\pi}{2}$ la normal tiene dirección $-\hat{x}$ y la fem es negativa, por lo tanto la dirección de la corriente inducida será opuesta a la normal, es decir antihoraria.
- Entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π la normal tiene dirección $\hat{x}$ y la fem es negativa, por lo tanto la dirección de la corriente inducida será opuesta a la normal, es decir horaria.

Problema 5

Un cable rectilíneo muy largo, conduce una corriente de 1 A. A 1 m del cable se encuentra el extremo de una aguja de 20 cm de largo que gira en torno de ese extremo en el plano del cable, con una velocidad angular $\omega = 20\,\mathrm{seg}^{-1}$, como se muestra en la figura. Calcular la f.e.m. inducida entre los extremos de la aguja, como función del tiempo.



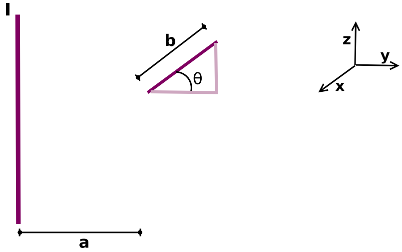
Este problema corresponde al caso en que la f.e.m inducida es producida por una fuerza magnética.

$$\epsilon = \int \vec{v} \times \vec{B} \,.\, \vec{dl}$$

donde los límites de la integral son los extremos de la aguja.

Problema 5

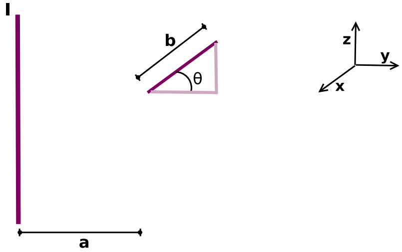
Ahora vamos a calcular la velocidad, recordemos que en este caso $\vec{r}$ tiene que describir todos los puntos de la aguja



$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\
&= \omega\,\hat{x} \times (a + l\cos\theta)\,\hat{y} + l\sin\theta\,\hat{z}
\end{aligned}
$$

Problema 5

Ahora vamos a calcular la velocidad, recordemos que en este caso $\vec{r}$ tiene que describir todos los puntos de la aguja

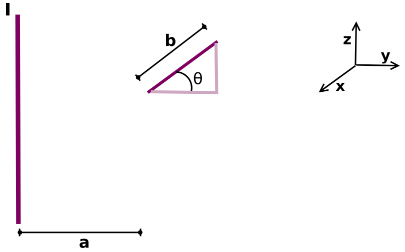


$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\
&= \omega\,\hat{x} \times (a + l\cos\theta)\,\hat{y} + l\sin\theta\,\hat{z} \\
&= \omega[(a + l\cos\theta)\,\hat{z} - \omega l\sin\theta\,\hat{y}]
\end{aligned}
$$

donde l toma valores entre 0 y $b = 20$ cm y $\theta = \omega t$.

Problema 5

Ahora vamos a calcular la velocidad, recordemos que en este caso $\vec{r}$ tiene que describir todos los puntos de la aguja



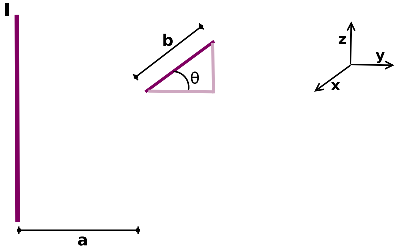
$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\
&= \omega\,\hat{x} \times (a + l\cos\theta)\,\hat{y} + l\sin\theta\,\hat{z} \\
&= \omega[(a + l\cos\theta)\,\hat{z} - \omega l\sin\theta\,\hat{y}]
\end{aligned}
$$

donde l toma valores entre 0 y $b = 20$ cm y $\theta = \omega t$. Recordemos la expresión del campo magnético de un hilo con corriente I:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}(-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$

En el plano donde gira la aguja (plano y-z, $\phi = \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{x}$

A continuación calculamos $\vec{v} \times \vec{B}$ pero teniendo cuidado de evaluar $\vec{B}$ en la posición de la aguja $\vec{r}_a = (a + l\cos\theta)\hat{y} + l\sin\theta\hat{z}$:



Recordando la expresión para $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{x}$ en el plano y-z, tenemos:

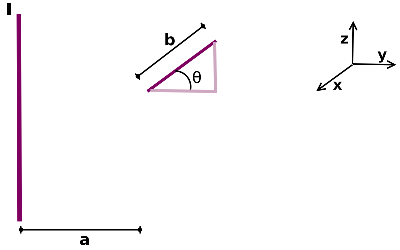
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(a + l\cos\theta)}\hat{x}$$

De esta manera, se obtiene:

$$\vec{v} \times \vec{B} = [\omega(a + l\cos\theta)\,\hat{z} - \omega l\sin\theta\,\hat{y}] \times \left[\frac{-\mu_0 I}{2\pi(a + l\cos\theta)}\right]\hat{x}$$

Problema 5

A continuación calculamos $\vec{v} \times \vec{B}$ pero teniendo cuidado de evaluar $\vec{B}$ en la posición de la aguja $\vec{r}_a = (a + l\cos\theta)\hat{y} + l\sin\theta\hat{z}$:



Recordando la expresión para $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{x}$ en el plano y-z, tenemos:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(a + l\cos\theta)}\hat{x}$$

De esta manera, se obtiene:

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{B} &= [\omega(a + l\cos\theta)\,\hat{z} - \omega l\sin\theta\,\hat{y}] \times \left[\frac{-\mu_0 I}{2\pi(a + l\cos\theta)}\right]\hat{x} \\ &= -\frac{\mu_0 I\omega}{2\pi(a + l\cos\theta)}\,[(a + l\cos\theta)\hat{y} + l\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{z}]\end{aligned}$$

donde $a = 1$ m, l toma valores entre 0 y $b = 20$ cm.

Problema 5

Finalmente entonces podemos calcular la f.e.m.

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \int \vec{v}\times\vec{B}.\vec{dl}\\ &= \int_0^b -\frac{\mu_0 I\omega}{2\pi}\left[\hat{y}+\frac{l\,\mathrm{sen}\,\theta}{a+l\cos\theta}\hat{z}\right].dl\,(\cos\theta\,\hat{y}+\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{z})\end{aligned}$$

Problema 5

Finalmente entonces podemos calcular la f.e.m.

$$
\begin{aligned}
\epsilon(t) &= \int \vec{v} \times \vec{B} . \vec{dl} \\
&= \int_0^b -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[\hat{y} + \frac{l \operatorname{sen} \theta}{a + l \cos \theta} \hat{z} \right] . dl \left(\cos\theta \, \hat{y} + \operatorname{sen}\theta \, \hat{z} \right) \\
&= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \int_0^b \left[\cos\theta + \frac{l \operatorname{sen}^2 \theta}{a + l \cos\theta} \right] dl
\end{aligned}
$$

Problema 5

Finalmente entonces podemos calcular la f.e.m.

$$
\begin{aligned}
\epsilon(t) &= \int \vec{v} \times \vec{B} . \vec{dl} \\
&= \int_0^b -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[\hat{y} + \frac{l \operatorname{sen}\theta}{a + l\cos\theta} \hat{z} \right] . dl \left(\cos\theta \, \hat{y} + \operatorname{sen}\theta \, \hat{z} \right) \\
&= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \int_0^b \left[\cos\theta + \frac{l \operatorname{sen}^2\theta}{a + l\cos\theta} \right] dl \\
&= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[l\cos\theta + \frac{l}{\cos\theta} - \frac{a \log(a + l\cos\theta)}{\cos^2\theta} \right] \Big|_0^b
\end{aligned}
$$

Problema 5

Finalmente entonces podemos calcular la f.e.m.

$$\begin{aligned}
\epsilon(t) &= \int \vec{v} \times \vec{B} . \vec{dl} \\
&= \int_0^b -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[\hat{y} + \frac{l \operatorname{sen} \theta}{a + l \cos\theta} \hat{z} \right] . dl \, (\cos\theta \, \hat{y} + \operatorname{sen}\theta \, \hat{z}) \\
&= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \int_0^b \left[\cos\theta + \frac{l \operatorname{sen}^2\theta}{a + l\cos\theta} \right] dl \\
&= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[l\cos\theta + \frac{l}{\cos\theta} - \frac{a \log(a + l\cos\theta)}{\cos^2\theta} \right] \Big|_0^b \\
&= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[b\cos\theta + \frac{b}{\cos\theta} - \frac{a \log(a + b\cos\theta)}{\cos^2\theta} + \frac{a \log a}{\cos^2\theta} \right]
\end{aligned}$$

Problema 5

Finalmente entonces podemos calcular la f.e.m.

$$
\begin{aligned}
\epsilon(t) &= \int \vec{v} \times \vec{B}.\,\vec{dl} \\
&= \int_0^b -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi}\left[\hat{y} + \frac{l\,\mathrm{sen}\,\theta}{a + l\cos\theta}\hat{z}\right].\,dl\,(\cos\theta\,\hat{y} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{z}) \\
&= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi}\int_0^b \left[\cos\theta + \frac{l\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{a + l\cos\theta}\right] dl \\
&= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi}\left[l\cos\theta + \frac{l}{\cos\theta} - \frac{a\log(a + l\cos\theta)}{\cos^2\theta}\right]\Big|_0^b \\
&= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi}\left[b\cos\theta + \frac{b}{\cos\theta} - \frac{a\log(a + b\cos\theta)}{\cos^2\theta} + \frac{a\log a}{\cos^2\theta}\right] \\
&= -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi}\left[b\cos\omega t + \frac{b}{\cos\omega t} - \frac{a}{\cos^2\omega t}\log(1 + \frac{b}{a}\cos\omega t)\right]
\end{aligned}
$$