Clase 22: Circuitos de Corriente Alterna

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

15 de noviembre de 2021

Repaso de números complejos

Recordemos que si $z = a + bi$ es un número complejo, su expresión en forma polar es:

$$z = |z|e^{i\theta} \qquad \text{con} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad y \quad \theta = \arctan(\frac{b}{a})$$

A su vez:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Recordemos que $\bar{z} = a - bi$ y

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

Recordemos la ecuación básica de la teoría de circuitos:

$$\epsilon = RI + L\dot{I} + \frac{Q}{C} \tag{1}$$

donde ϵ es la caída de tensión en la fuente, R es la resistencia, L la inductancia y C la capacidad. Derivando esta ecuación se obtiene:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = R\dot{I} + L\ddot{I} + \frac{I}{C} \tag{2}$$

Ahora vamos a resolver un circuito donde $\epsilon = \epsilon_0 \cos \omega t$. Una herramienta muy útil es tratar tanto a la fuente como a la corriente como números complejos:

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{i\omega t} \tag{3}$$

$$J = J_0 e^{i\omega t} \tag{4}$$

donde ϵ_0 es un número real y J_0 es un número complejo.

Circuitos de Corriente Alterna

Aqui es muy importante entender que ϵ y J no representan la caída de tensión real en la fuente o la corriente real, sino que son herramientas matemáticas para facilitar la resolución de los circuitos y están relacionadas con estas últimas:

$$
\begin{aligned}
V(t) &= Re[\epsilon_0 e^{i\omega t}] = \epsilon_0 \cos\omega t && (5)\\
I(t) &= Re[J_0 e^{i\omega t}] = Re[|J_0| e^{i(\omega t+\theta)}] = |J_0|\cos(\omega t+\theta) && (6)
\end{aligned}
$$

donde $J_0 = |J_0| e^{i\theta}$ es un número complejo.

Recordemos la ecuación 2 :

$$\frac{d\epsilon}{dt} = R\dot{I} + L\ddot{I} + \frac{I}{C}$$

Y ahora insertemos en esta ecuación las expresiones complejas $\epsilon = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ y $J = J_0 e^{i\omega t}$:

$$i\omega\epsilon_0 e^{i\omega t} = i\omega R J_0 e^{i\omega t} - \omega^2 L J_0 e^{i\omega t} + \frac{J_0 e^{i\omega t}}{C} \quad (7)$$

$$i\omega\epsilon_0 e^{i\omega t} = (i\omega R - \omega^2 L + \frac{1}{C}) J_0 e^{i\omega t} \quad (8)$$

Dividiendo esta última ecuación por $i\omega$ obtenemos:

$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = \underbrace{(R + i\omega L - \frac{i}{\omega C})}_{Z} J_0 e^{i\omega t} \quad (9)$$

Es decir, que podemos escribir la ecuación anterior:

$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = Z J_0 e^{i\omega t} \quad (10)$$

Vamos a llamar a Z la impedancia:

$$Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} = R + iX \tag{11}$$

donde $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.
Definimos la **admitancia** y recordando que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{R}{R^2 + X^2} - i\frac{X}{R^2 + X^2} \tag{12}$$

Definimos la **conductancia** como la parte real de la admitancia

$$G = \mathrm{Re}[\frac{1}{Z}] = \frac{R}{R^2 + X^2} \tag{13}$$

y la **susceptancia** como la parte imaginaria de la admitancia

$$B = \mathrm{Im}[\frac{1}{Z}] = -\frac{X}{R^2 + X^2} \tag{14}$$

Podemos escribir las ecuaciones de malla para la corriente compleja:

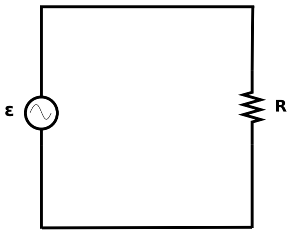
$$\epsilon = \sum_i Z_i J_i \tag{15}$$

donde $\epsilon = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ y

$$J_i = J_{oi} e^{i\omega t} = |J_{oi}| e^{i\alpha} e^{i\omega t} = |J_{oi}| e^{i(\omega t + \alpha)} \tag{16}$$

Algunos ejemplos simples

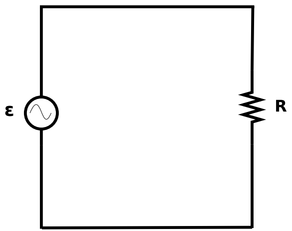
Para el siguiente circuito vamos a calcular al corriente que pasa por la resistencia:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = R J_0 e^{i\omega t}$$

Algunos ejemplos simples

Para el siguiente circuito vamos a calcular al corriente que pasa por la resistencia:



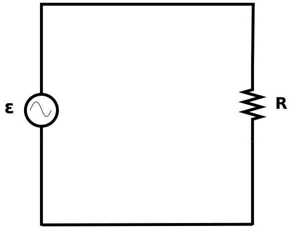
$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = R J_0 e^{i\omega t}$$

De esta manera obtenemos:

$$J_0 = \frac{\epsilon_0}{R}$$

Algunos ejemplos simples

Para el siguiente circuito vamos a calcular al corriente que pasa por la resistencia:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = R J_0 e^{i\omega t}$$

De esta manera obtenemos:

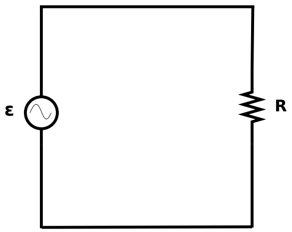
$$J_0 = \frac{\epsilon_0}{R}$$

Y por lo tanto:

$$J = J_0 e^{i\omega t} = \frac{\epsilon_0}{R} e^{i\omega t}$$

Algunos ejemplos simples

Para el siguiente circuito vamos a calcular al corriente que pasa por la resistencia:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = R J_0 e^{i\omega t}$$

De esta manera obtenemos:

$$J_0 = \frac{\epsilon_0}{R}$$

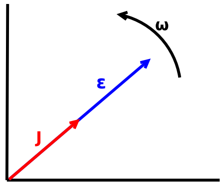
Y por lo tanto:

$$J = J_0 e^{i\omega t} = \frac{\epsilon_0}{R} e^{i\omega t}$$

Finalmente, la corriente que pasa por la resistencia es:

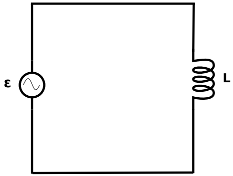
$$I(t) = \mathrm{Re} J = \frac{\epsilon_0}{R} \cos \omega t$$

Podemos concluir que para la resistencia, la corriente y la fuente están en fase.



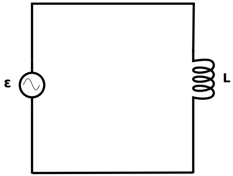
Algunos ejemplos simples

Para el siguiente circuito vamos a calcular al corriente que pasa por la inductancia:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = i\omega L J_0 e^{i\omega t}$$

Para el siguiente circuito vamos a calcular al corriente que pasa por la inductancia:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = i\omega L J_0 e^{i\omega t}$$

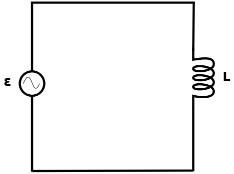
De esta manera obtenemos:

$$J_0 = \frac{\epsilon_0}{i\omega L} = -i\frac{\epsilon_0}{\omega L}$$

Recordemos que $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i$.

Algunos ejemplos simples

Para el siguiente circuito vamos a calcular al corriente que pasa por la inductancia:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = i\omega L J_0 e^{i\omega t}$$

De esta manera obtenemos:

$$J_0 = \frac{\epsilon_0}{i\omega L} = -i\frac{\epsilon_0}{\omega L}$$

Recordemos que $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i$.
Y por lo tanto:

$$J_0 = \frac{\epsilon_0}{i\omega L} = -i\frac{\epsilon_0}{\omega L} = \frac{\epsilon_0}{\omega L}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

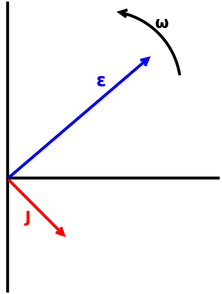
De esta manera obtenemos:

$$J = J_0 e^{i\omega t} = \frac{\epsilon_0}{\omega L}\, e^{i(\omega t - i\,\frac{\pi}{2})}$$

Finalmente, la corriente que pasa por la inductancia es:

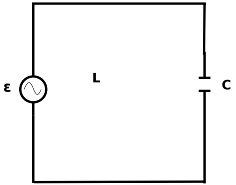
$$I(t) = \mathrm{Re} J = \frac{\epsilon_0}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Podemos concluir que para la inductancia, la corriente y la fuente están en desfasadas en $-\frac{\pi}{2}$.



Algunos ejemplos simples

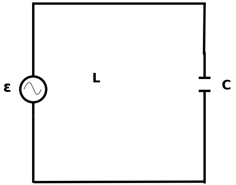
Para el siguiente circuito vamos a calcular al corriente que pasa por el capacitor:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = -\frac{i}{\omega C} J_0 e^{i\omega t}$$

Algunos ejemplos simples

Para el siguiente circuito vamos a calcular al corriente que pasa por el capacitor:



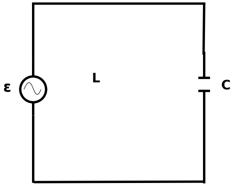
$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = -\frac{i}{\omega C} J_0 e^{i\omega t}$$

De esta manera obtenemos:

$$J_0 = -\frac{\epsilon_0 \omega C}{i} = i\epsilon_0 \omega C$$

Recordemos que $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.

Para el siguiente circuito vamos a calcular al corriente que pasa por el capacitor:



$$\epsilon_0 e^{i\omega t} = -\frac{i}{\omega C} J_0 e^{i\omega t}$$

De esta manera obtenemos:

$$J_0 = -\frac{\epsilon_0 \omega C}{i} = i\epsilon_0 \omega C$$

Recordemos que $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.
Y por lo tanto:

$$J_0 = -\frac{\epsilon_0 \omega C}{i} = i\epsilon_0 \omega C = \epsilon_0 \omega C e^{i\frac{\pi}{2}}$$

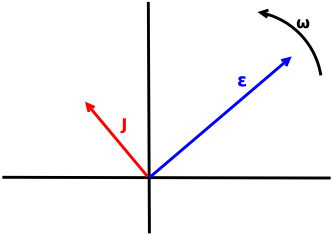
De esta manera

$$J = J_0 e^{i\omega t} = \epsilon_0 \omega C\, e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

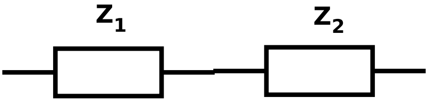
Finalmente, la corriente que pasa por el capacitor es:

$$I(t) = \mathrm{Re}J = \epsilon_0 \omega C \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Podemos concluir que para el capacitor, la corriente está adelantada $\frac{\pi}{2}$ respecto de la fuente.

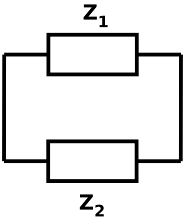


Para dos impedancias en serie la impedancia equivalente será:



$$Z_{\text{eq}} = Z_1 + Z_2$$

Para dos impedancias en paralelo la impedancia equivalente será:



$$Z_{\text{eq}} = (\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2})^{-1}$$

Caída de tensión:

La caída de tensión en una impedancia:

$$\mathrm{Re}[\Delta V] = \mathrm{Re}[ZJ] = \mathrm{Re}[|\Delta V| e^{i\omega t+\alpha}] = |\Delta V| \cos(\omega t + \alpha)$$

Qué es lo que medirá un voltímetro? Teniendo en cuenta que el el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, se define ΔV_{RMS}:

$$\begin{aligned}
\Delta V_{RMS}^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T [|\Delta V| \cos(\omega t + \alpha)]^2\, dt \\
&= \frac{\omega}{2\pi}\Delta V^2 \left[\frac{2(\alpha+\omega t) + \sin[2(\omega t+\alpha)]}{4\omega}\right]\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\
&= \frac{\omega}{2\pi}\Delta V^2 \left[\frac{2\alpha + 4\pi + \sin(4\pi + 2\alpha) - 2\alpha - \sin(2\alpha)}{4\omega}\right] \\
&= \frac{\omega}{2\pi}\Delta V^2 \left[\frac{4\pi + \sin(4\pi)\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)\cos(4\pi) - \sin(2\alpha)}{4\omega}\right] \\
&= \frac{\omega}{2\pi}\Delta V^2 \frac{\pi}{\omega} = \frac{\Delta V^2}{2}
\end{aligned}$$

Caída de tensión:

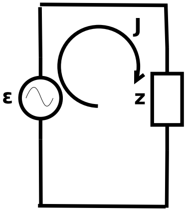
Con cual finalmente se obtiene:

$$\Delta V_{RMS} = |\Delta V| \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Potencia

La potencia entregada por la fuente será:

$$P(t) = \mathrm{Re} J(t)\ \mathrm{Re}\,\epsilon(t)$$



La
potencia disipada por una resistencia:

$$P(t) = R\, I^2(t) = R\, [\mathrm{Re} J(t)]^2$$

Por último, la potencia media es la potencia disipada en un período completo.

$$\bar{P} \quad = \quad \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

Si $J = |J_0|e^{i(\omega t+\theta)}$ y $\epsilon = \epsilon_0 e^{i(\omega t)}$:

$$\begin{aligned}
\bar{P} &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t)dt \\
&= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathrm{Re}J(t)\ \mathrm{Re}\,\epsilon(t)
\end{aligned}$$

Si $J = |J_0|e^{i(\omega t+\theta)}$ y $\epsilon = \epsilon_0 e^{i(\omega t)}$:

$$\begin{aligned}
\bar{P} &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t)dt \\
&= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathrm{Re}J(t)\ \mathrm{Re}\,\epsilon(t) \\
&= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |J_0|\cos\left(\omega t+\theta\right)\epsilon_0\cos\left(\omega t\right)
\end{aligned}$$

Si $J = |J_0|e^{i(\omega t+\theta)}$ y $\epsilon = \epsilon_0 e^{i(\omega t)}$:

$$
\begin{aligned}
\bar{P} &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t)dt \\
&= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathrm{Re}J(t)\ \mathrm{Re}\,\epsilon(t) \\
&= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |J_0|\cos(\omega t+\theta)\,\epsilon_0\cos(\omega t) \\
&= \frac{\omega}{2\pi}|J_0|\epsilon_0\left[\frac{2\omega t\cos\theta+\sin(2\omega t+\theta)}{4\omega}\right]\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\
&= \frac{\omega}{2\pi}|J_0|\epsilon_0\left[\frac{4\pi\cos\theta+\sin(4\pi+\theta)-\sin\theta}{4\omega}\right] \\
&= \frac{\omega}{2\pi}|J_0|\epsilon_0\left[\frac{4\pi\cos\theta+\sin(4\pi)\cos\theta-\sin\theta}{4\omega}\right] \\
&= \frac{\omega}{2\pi}|J_0|\epsilon_0\frac{4\pi\cos\theta}{4\omega} = \frac{1}{2}\epsilon_0|J_0|\cos\theta
\end{aligned}
$$