

Simetrías y Campos

Resumen de teórica - v0.1

Ariel Chernomoretz

May 19, 2022

1 Introducción

Cualquier campo generado por una fuente debe respetar las simetrías que la misma presenta. Esto significa que si \vec{P}_1 y \vec{P}_2 son dos puntos del espacio conectados por una operación de simetría que deja invariante la fuente (por ejemplo una rotación o una reflexión) el campo que dicha fuente produce en esos puntos debe estar vinculado a través de esa misma transformación. Lo que estamos diciendo es que si se tratase de una fuente de campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ y si T representara a una transformación de simetría para la fuente entonces:

$$\vec{P}_2 = T(\vec{P}_1) \Rightarrow \vec{E}(\vec{P}_2) = T(\vec{E}(\vec{P}_1)) \quad (1)$$

Veamos esto con el siguiente ejemplo. Consideremos un cilindro infinito cargado con densidad superficial uniforme como muestra la Figura 1.A y preguntemonos qué podemos decir de $\vec{E}(\vec{r})$ a partir de argumentos de simetría. Comencemos identificando las simetrías de la fuente:

- (a) traslación en \hat{z}
- (b) rotación respecto a \hat{z}
- (c) reflexión sobre cualquier plano perpendicular a \hat{z}
- (d) reflexión sobre cualquier plano que contenga a \hat{z}

En concordancia con las simetrías identificadas vamos a utilizar coordenadas cilíndricas. Lo que podemos decir rápidamente es que $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\rho)$. Una vez establecido eso, estamos buscando entonces poder decir cosas sobre $\vec{E}(\rho) = E_\rho(\rho)\hat{\rho} + E_\theta(\rho)\hat{\theta} + E_z(\rho)\hat{z}$.

Comencemos considerando la componente E_z del campo y veamos que podemos decir de ella a partir de argumentos de simetría. El panel (A) de la Figura 1 muestra dos posiciones en el espacio, \vec{P}_1 y \vec{P}_2 que están conectadas entre sí por dos transformaciones que son operaciones de simetría para la fuente: una reflexión por el plano $\hat{x} \times \hat{y}$ y una traslación en \hat{z} . (En la figura se ha elegido $E_z(\vec{P}_1) > 0$). Según la Ecuación 1 esto significa que, por un lado, el campo que encontremos en \vec{P}_2 debe ser el reflejado por el plano $\hat{x} \times \hat{y}$ del que se encuentre en \vec{P}_1 , y **al mismo tiempo**, el campo que encontremos en \vec{P}_2 debe obtenerse como el *trasladado* del que se encuentre en \vec{P}_1 . Esto significa que debe cumplirse simultáneamente que

$$E_z(\vec{P}_2)\hat{z} = \text{Reflexión}(E_z(\vec{P}_1)\hat{z}) = -E_z(\vec{P}_1)\hat{z} \quad (2)$$

$$E_z(\vec{P}_2)\hat{z} = \text{Traslación}(E_z(\vec{P}_1)\hat{z}) = E_z(\vec{P}_1)\hat{z} \quad (3)$$

La única manera de que esto ocurra es que $E_z(\vec{P}_1) = E_z(\vec{P}_2) = 0$

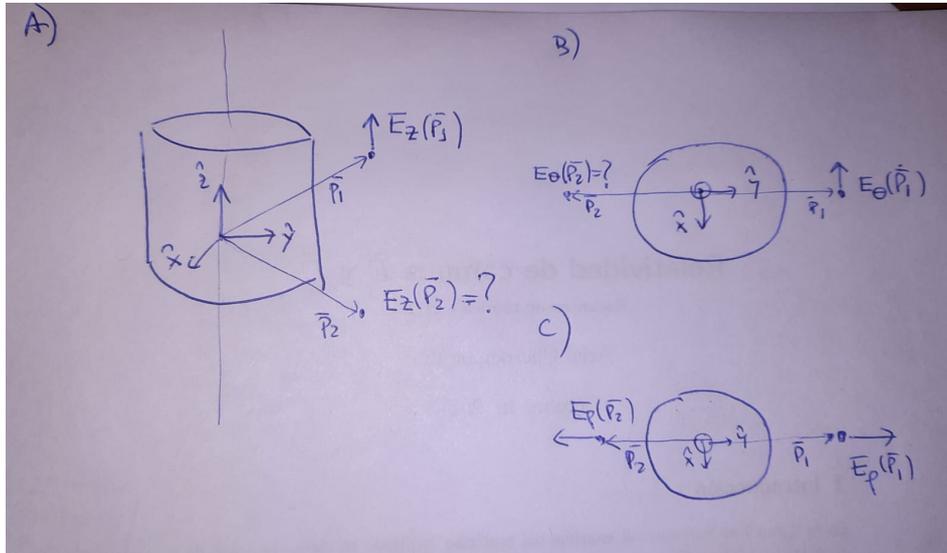


Figure 1: d

De manera similar podemos considerar lo que ocurre con E_θ (panel B de la Figura 1). En este caso las posiciones \vec{P}_1 y \vec{P}_2 identificadas en el dibujo están conectadas entre sí por dos transformaciones que son operaciones de simetría para la fuente: una reflexión por el plano $\hat{x} \times \hat{z}$ y una rotación alrededor de \hat{z} en 180 grados. Es fácil ver que también en este caso, la única alternativa es que $E_\theta(\vec{P}_1) = E_\theta(\vec{P}_2) = 0$.

Finalmente el panel C de la figura 1 permite ver que una componente E_ϕ no nula es la única compatible con la simetría de la fuente. En este caso, tanto una reflexión por el

plano $\hat{x} \times \hat{z}$ como una rotación alrededor de \hat{z} en 180 grados hacen que $E_\rho(\vec{P}_1) = -E_\rho(\vec{P}_2)$.

De esta manera, sólo utilizando argumentos de simetría, pudimos establecer que para este problema

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_\rho(\rho)\hat{\rho}$$

2 Vectores y Pseudovectores

Vimos arriba que existen ciertas operaciones/transformaciones que reflejan propiedades intrínsecas de una fuente y por lo tanto pueden utilizarse para extraer conclusiones sobre la forma de los campos que dichas fuentes producen. Es importante en este punto entrar en un poco más de detalle (no mucho más) sobre como afectan diferente tipo de transformaciones a distintas entidades matemáticas que utilizamos para establecer descripciones físicas en diversos sistemas.

Comencemos recordando que un **vector** es una entidad que posee: dirección, magnitud y sentido. En particular, sus componentes se transforman bajo reglas muy específicas ante transformaciones que pueden ser *propias* (rotaciones simples, traslaciones) o *impropias* (inversiones, reflexiones sobre planos).

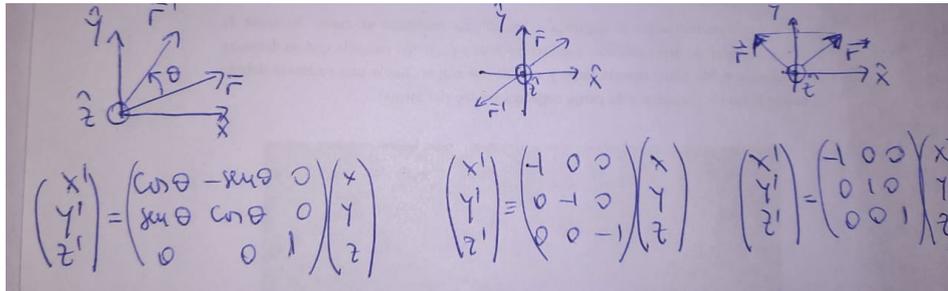


Figure 2: d

En la Figura 2 mostramos 3 ejemplos de transformaciones lineales. Una rotación, una inversión y una reflexión sobre el plano $\hat{y} \times \hat{z}$ se muestran en los paneles izquierdo, central y derecho respectivamente. Notemos que para las transformaciones propias el determinante de la matriz que opera sobre el vector es $\det(R_\theta) = 1$, mientras que para las transformaciones impropias $\det(\text{Inv}) = \det(\text{Reflex}) = -1$.

2.1 Pseudovectores

En descripciones físicas, muchas veces aparecen un tipo de entidades, similares a los vectores, pero con algunas diferencias en cuanto a como se comportan ante transformaciones. En particular, los **pseudovectores** son cantidades definidas como función de vectores o de otras formas geométricas (por ejemplo, superficies) que transforman como vectores ante transformaciones propias PERO sufren un cambio de signo adicional ante transformaciones impropias. Es decir, siendo T un operador asociado a una transformación:

$$\text{vectores: } \vec{V}' = T(\vec{V}) \quad (4)$$

$$\text{pseudo-vectores: } \vec{P}' = \det(T)T(\vec{P}) \quad (5)$$

Adicionalmente, los pseudovectores, también sufren un cambio de signo si cambia la orientación del espacio. Esto se refiere a la convención utilizada para resolver la ambigüedad planteada sobre la dirección de la normal a un plano definido por dos vectores \vec{A} y \vec{B} $\hat{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$, que usualmente designamos como *regla de la mano derecha*. En los paneles de la Figura 3 se ven dos ejemplos de ternas de ejes que reflejan dos situaciones con orientaciones del espacio no equivalente. La primera sería compatible con una regla-de-la-mano-derecha, mientras que la segunda con una regla-de-la-mano-izquierda.

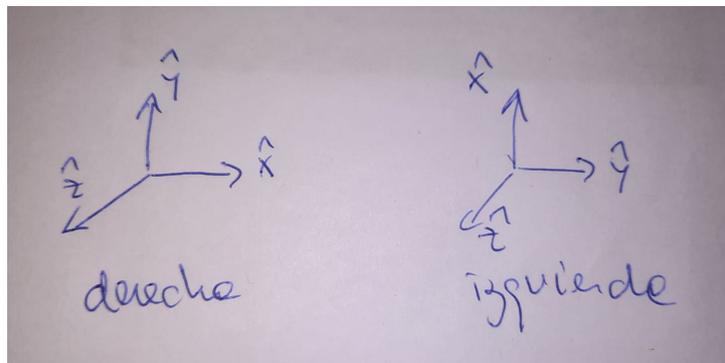


Figure 3: d

Veamos un ejemplo de lo que estamos hablando. Imaginemos un sistema de una partícula que se encuentra rotando en una trayectoria circular alrededor de un eje que pasa por un punto o del espacio (panel izquierdo de la figura 4) En un determinado instante la partícula se encuentra en la posición \vec{r} medida desde o y posee una velocidad tangencial \vec{v} . Estas condiciones definen que su velocidad angular resulte: $\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$ (adoptando la usual regla de la mano derecha $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$). Ahora reflejemos todo el sistema

sobre el plano π , dibujado como una línea de puntos en la figura. Esto significa reflejar cada parte de la trayectoria y, en particular, transformar $\vec{o} \rightarrow \vec{o}'$, $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$, $\vec{v} \rightarrow \vec{v}'$.

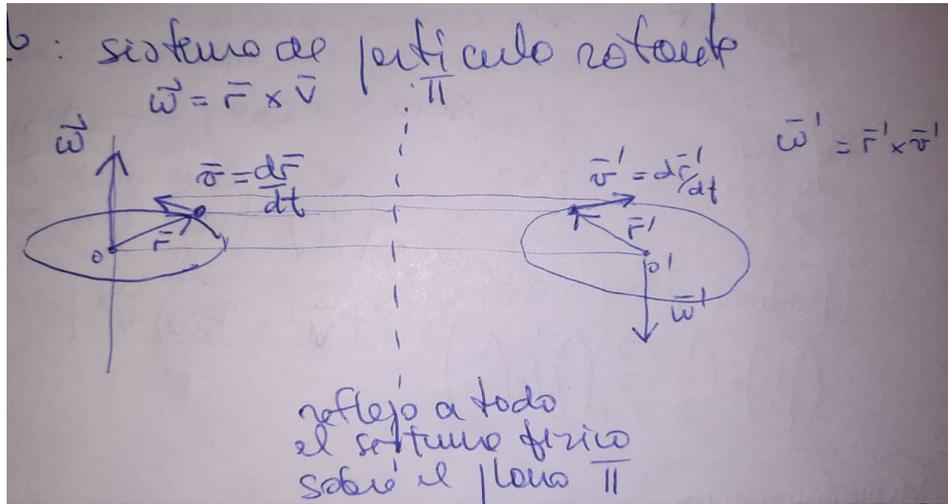


Figure 4: d

Ahora bien, en el sistema reflejado **debe** suceder que $\vec{\omega}' = \vec{r}' \times \vec{v}'$ por lo que vemos a partir del dibujo del panel derecho que la velocidad angular se tranforma ante la reflexión como $\vec{\omega}' = -\vec{\omega}$. ω no se transformó ante la reflexión como lo haría un vector, sino que recibió un cambio de signo adicional. Es decir, se transformo (porque lo es!) como un pseudovector.

En general un pseudovector \vec{P} surge como producto vectorial de 2 vectores: $\vec{P} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ (notar que entonces tambien vale que $\vec{V}_2 = \vec{P} \times \vec{V}_1$ y $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \times \vec{P}$). En cuanto a la naturaleza pseudovectorial, también vale que $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ y $\vec{P}_2 = \lambda \vec{P}_1$, donde λ es un escalar ($\lambda = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ o tambien $\lambda = \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2$). Notar que el triple producto $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ hace aparecer un tipo diferente de entidad, contracción de un vector y un pseudovector, llamado *pseudo-escalar* y que, a diferencia de un escalar, cambia de signo ante operaciones de paridad.

2.2 El campo magnético \vec{B} es un pseudovector

Llegado este punto podemos caracterizar mejor la naturaleza algebraica del campo magnético \vec{B} . Partamos para ello de su definición a partir de la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6)$$

Como vemos \vec{B} surge de sumar infinitas contribuciones infinitesimales, cada una de ellas de caracter pseudovectorial, dado que involucra el producto vectorial de dos vectores: $\vec{j} = q.n.\vec{u}$ y $(\vec{r} - \vec{r}')$. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que \vec{B} es un pseudovector y por lo tanto deberemos tener eso en cuenta al utilizar argumentos de simetría que lo involucren. Pero antes de avanzar en ese sentido recordemos la expresión de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q.(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

En esta expresión vemos que la igualdad se cumple en cuanto a la naturaleza algebraica de los factores que aparecen. Si asumimos que q es un escalar, entonces tanto $q.\vec{E}$ como $q.(\vec{v} \times \vec{B})$ tienen naturaleza vectorial y, por lo tanto, \vec{F} como era de esperar resulta un vector.

3 Campo generado por una corriente circulando por un hilo infinito

Planteemos ahora el problema de estimar el campo magnético producido por una corriente estacionaria que circula por un cable infinito (ver Figura 5.A).

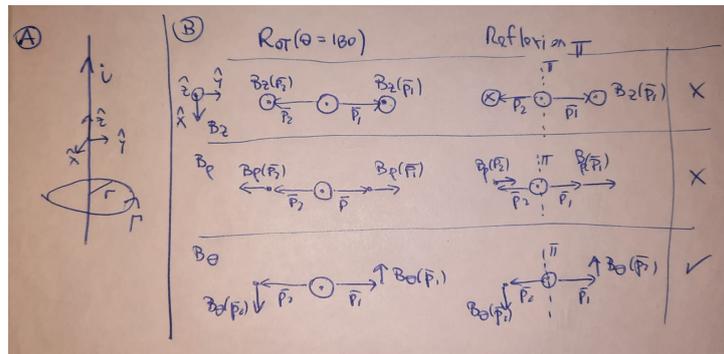


Figure 5: d

Nos interesa un abordaje basado en consideraciones sobre la simetría de la fuente para poner restricciones a la forma general $\vec{B}(\vec{r}) = B_\rho(\vec{r})\hat{\rho} + B_\theta(\vec{r})\hat{\theta} + B_z(\vec{r})\hat{z}$.

En nuestro caso las simetrías que presenta la fuente incluyen:

- (a) simetría de rotación respecto a \hat{z}
- (b) simetría de traslación respecto a \hat{z}
- (c) simetría de reflexión ante planos que contengan al eje \hat{z}

Lo primero que podemos decir es que la magnitud de \vec{B} no puede depender sino de la distancia al eje por el que circula la corriente, por lo que $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho)$.

Como mencionamos en la sección 1 si \vec{P}_1 y \vec{P}_2 son dos puntos del espacio conectados por una operación de simetría que deja invariante la fuente (por ejemplo una rotación o una reflexión) el campo que dicha fuente produce en esos puntos debe estar vinculado a través de esa misma transformación. En la Figura 5.B se esquematiza este tipo de consideraciones para las tres posibles componentes del campo magnético, B_z , B_ρ y B_{θ} , en la primera, segunda y tercera fila del panel. En todos los casos se considera el par de puntos del espacio \vec{P}_1 y \vec{P}_2 equidistantes del cable y se analiza el resultado de vincular el campo magnético presente en dichos puntos a través de una operación de rotación (primer columna) o de una reflexión sobre el plano π que contiene al cable. Como ambas transformaciones dejan invariante a la fuente, todas ellas se deben cumplir. Esto significa que, para no entrar en contradicciones mutuas, $B_z = B_\rho = 0$. De esta manera llegamos a que para nuestro problema

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\theta(\rho)\hat{\theta}$$

Podemos seguir avanzando si consideramos el circuito orientado Γ que se muestra en la Figura 5.A. Si aplicamos el teorema circuital de Ampere utilizando dicho circuito orientado vale que:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I_{\Gamma} \\ B_\theta(\rho = r) 2\pi r &= \mu_0 i \\ B_\theta(\rho = r) &= \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \\ B_\theta(\rho = r) &= \frac{\kappa 2i}{r} \end{aligned}$$

donde $= \frac{\mu_0}{4\pi}$. Finalmente, obtenemos que el campo generado por la corriente que recorre el hilo infinito resulta:

$$\vec{B} = \kappa 2i \frac{\hat{dl}_{\text{hilo}} \times \hat{r}}{r} \quad (7)$$

4 Campo magnético generado por un solenoide infinito

Utilicemos ahora argumentos de simetría para calcular el campo magnético producido por una corriente que circula por un solenoide que no es otra cosa que un cable enrollado

como se muestra en el panel superior izquierdo de la figura fig:sole. Vamos a suponer que el diametro del solenoide es mucho menor que su longitud ($d \ll L$) y que nos interesa evaluar el campo lejos de los extremos, por lo que podremos suponer que se trata de un solenoide infinito. Por el solenoide circula una corriente i y llamaremos n al número de vueltas (o espiras) por unidad de longitud que presenta.

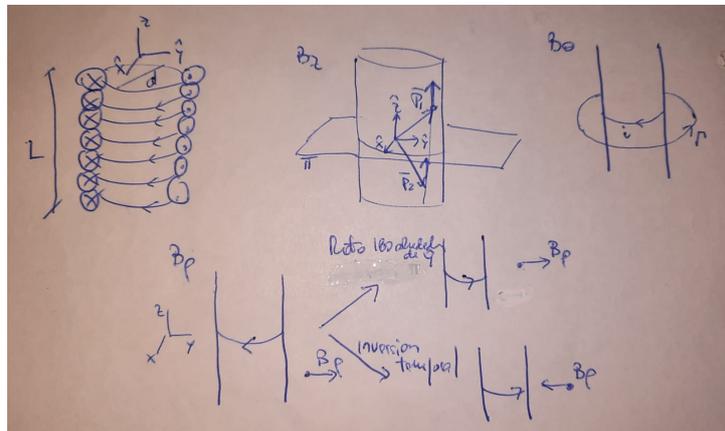


Figure 6: d

Las simetrías que presenta esta distribución particular de corriente son:

- (a) simetría de rotación alrededor de \hat{z}
- (b) simetría de traslación a lo largo de \hat{z}
- (c) reflexión sobre planos perpendiculares a \hat{z}

Al igual que en otras ocasiones es valido razonar que $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho)$. Analizando la correspondencia de los campos B_z en los puntos \vec{P}_1 y \vec{P}_2 del panel central superior, encontramos que un valor no nulo de B_z no entra en conflicto con las simetrías (b) y (c) que presenta la fuente. Por otra parte, aplicar el teorema circuital de Ampere sobre cualquier curva con $d\vec{l} = dl\hat{\theta}$ como muestra la figura del panel superior derecho de 6, implica que $B_\theta = 0$, ya que ese tipo de curvas no concatena corriente alguna. Para analizar lo que sucede con B_ρ , partamos de la configuración original y hagamos dos operaciones (fila inferior de la figura 6). Por un lado, una rotación de 180 grados sobre el eje \hat{y} altera a la fuente. Sin embargo, como es una operación que actúa en el espacio perpendicular a $\hat{\rho}$ no se espera que se altere B_ρ . Al mismo tiempo consideremos ahora una inversión temporal. En este caso se produce un cambio de las \vec{j} (fuentes de \vec{B} explícitamente contempladas en la ec de Biot-Savart) por lo que es de esperar que también se invierta el sentido de B_ρ .

Ambas transformaciones producen la misma distribución de fuentes, sin embargo anticipan cambios opuestos de B_ρ por lo que la única forma de conciliar estos resultados es que $B_\rho = 0$. En definitiva, vemos que para el solenoide infinito:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_z(\rho)\hat{z}$$

Podemos continuar ahora considerando al solenoide del panel superior de la figura 7. En concordancia con lo que acabamos de ver, supongamos que $\vec{B}(\vec{r}) = B_z(\rho)\hat{z}$, con $B_z(\rho) > 0$. Aplicando Ampere en el circuito Γ_1 (de altura a y ancho b) resulta:

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$B_z(0) \cdot a - B_z(b) \cdot a = 0$$

por lo que el **campo resulta unjiforme dentro del solenoide infinito**.

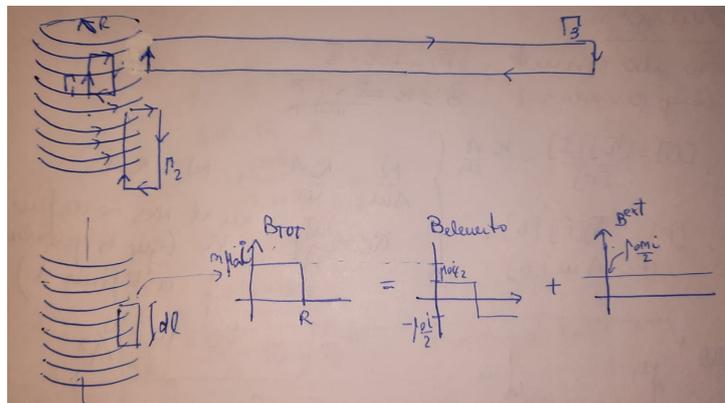


Figure 7: d

Podemos razonar análogamente considerando el circuito Γ_3 , de lo que resulta que también en el exterior el campo resulta constante. En este caso hacemos notar que podríamos haber dibujado al extremo vertical derecho del circuito tan alejado como hubieramos querido del solenoide. En particular podríamos haberlo considerado infinitamente alejado de las fuentes del campo. Esto sugiere que el valor de la constante que debemos elegir debería de hecho ser nulo, por lo que el campo fuera del solenoide infinito resulta nulo (cosa que se verifica experimentalmente).

Finalmente consideremos el circuito Γ_2 . En este caso

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I_{\Gamma_2} \\ B_z(\text{interno}) \cdot a - B_z(\text{externo}) \cdot a &= nai\mu_0 \\ B_z(\text{interno}) &= \mu_0 ni\end{aligned}$$

por lo que resulta:

$$\begin{aligned}\vec{B}^{\text{interno}} &= \mu_0 ni\hat{z} \\ \vec{B}^{\text{externo}} &= 0\end{aligned}$$

Vemos que el campo resulta proporcional al producto de la corriente i que circula por el solenoide y la densidad de espiras n , ya que el mismo representa la intensidad efectiva de corriente, por unidad de longitud, que circula por el solenoide.