1. Dieléctricos lineales y polarización

Hasta ahora en la materia vimos como calcular el campo eléctrico generado por distribuciones de cargas fijas en el espacio (cargas puntuales, planos cargados, etc) y habíamos visto que sucede cuando hay también conductores ideales (que pueden estar conectados a un potencial, aislados y/o cargados). Ahora le sumamos un ingrediente más: medios dieléctricos. Estos medios se caracterizan por ser *aislantes*, es decir, no hay cargas libres que puedan circular hasta anular el campo al que el medio este sometido. Sin embargo, sí se ven afectados por el campo eléctrico, y lo que les sucede es que se pueden *polarizar*.

Cuando un medio está polarizado, lo que sucede es que los átomos o moléculas que componen al material actúan como pequeños dipolos. Así como antes teníamos distribuciones de carga $\rho(\vec{r})$, ahora podemos tener distribuciones de dipolos $\vec{\mathcal{P}}(\vec{r})$. Este nuevo vector o campo es la *densidad de momento dipolar*. Nos dice cuantos dipolos hay por unidad de volumen y en que dirección apuntan. Es una magnitud vectorial justamente porque incluye tanto la densidad de dipolos como la dirección de ellos.

De la misma manera que una $\rho(\vec{r})$ genera un campo (que aprendimos a calcular), una $\vec{\mathcal{P}}(\vec{r})$ también lo hace. ¿Qué campo está generando el material al estar polarizado? Sabemos que un dipolo ideal $\vec{p}$ situado en el origen, tiene un potencial dado por

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Si el dipolo está en la posición $\vec{r}\,'$ entonces genera un potencial dado por

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

En el caso de un dieléctrico polarizado, el potencial que aparece es la suma (o mejor dicho la integral) de todos los dipolos que hay en el material, en donde el momento dipolar en cada elemento de volumen del material es $\vec{p}(\vec{r}\,') = \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')dV'$, y entonces el potencial se calcula así:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV' \tag{1}$$

En donde la integral se realiza sobre todo el volumen $\mathcal{V}$ del dieléctrico. Como pasaba cuando queríamos calcular el campo generada por una distribución de carga, hacer la integración directa del problema no siempre era una estrategia factible.

Por suerte, se puede demostrar (se hizo en la teórica, sino pueden verlo en el Griffiths 4.2.1 o cualquier libro del tema) que el potencial dado por la ecuación (1) genera un campo $\vec{E}_p$, y este campo es igual al generado por una distribución de carga $\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{P}}$ y $\sigma_p = \vec{\mathcal{P}}\cdot\hat{n}$.

En resumen: si tengo un material polarizado y conozco la densidad de momento dipolar $\vec{\mathcal{P}}$, entonces el campo eléctrico $\vec{E}_p$ que me genera esa polarización es el que me genera una distribución de carga ρ_p y σ_p, que puedo calcular a partir de $\vec{\mathcal{P}}$:

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{P}}$$
$$\sigma_p = \vec{\mathcal{P}}\cdot\hat{n}$$

Como nosotros ya sabemos calcular el campo conociendo las distribuciones de carga, podemos ahora también calcular el campo dado por una densidad de momento dipolar. Pero para poder hacer esto, alguien tiene que decirme cuanto vale el campo $\vec{\mathcal{P}}$. A estas cargas se les llama *cargas de polarización*.

2. Electretes

Existen materiales llamados electretes, que tienen la peculiaridad de poseer una polarización permanente. Es decir, el campo $\vec{\mathcal{P}}$ está dado por las características microscópicas del material. Veamos un ejemplo para ver como funciona lo que describimos hasta ahora. Supongamos que tenemos un electrete que es una lámina infinita de espesor D, como se ve en la figura 1 a), y tengo una polarización permanente $\vec{\mathcal{P}} = P_0\hat{z}$. ¿Cuál va a ser el campo generado por este material?

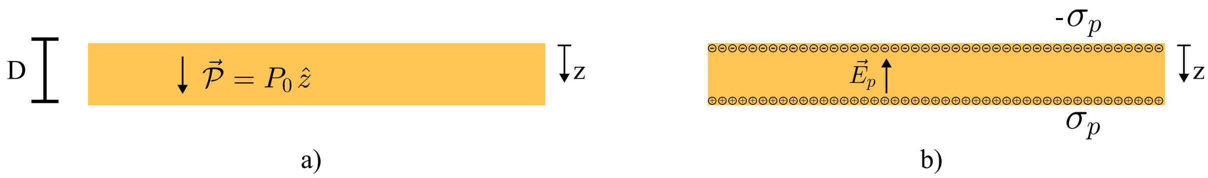

Figura 1: .

Como decíamos antes, lo que puedo hacer es calcular las cargas de polarización:

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{P}} = -\vec{\nabla}\cdot(P_0\hat{z}) = -\frac{\partial P_0}{\partial z} = 0$$
$$\sigma_p(z=0) = P_0\hat{z}\cdot(-\hat{z}) = -P_0$$
$$\sigma_p(z=D) = P_0\hat{z}\cdot(\hat{z}) = P_0$$

Es decir, no tengo cargas en volumen y tengo las 2 superficies de arriba y abajo cargadas, como se muestra en la figura 1 b). El campo entonces es:

$$\vec{E}_p(z) = \begin{cases} -\dfrac{P_0}{\epsilon_0}\hat{z} & 0 < z < D \\ \\ 0 & \text{afuera del medio} \end{cases}$$

3. Medios lineales

Los electretes tienen la ventaja de que su polarización está dada y no depende de nada más. En muchos otros casos, el material se polariza dependiendo del campo eléctrico al que este sometido el material. Los medios lineales, isótropos y homogéneos (los vamos a llamar simplemente ”lineales”), tienen una polarización dada por la siguiente forma:

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}) = \epsilon_0\chi_e\vec{E}(\vec{r}) \tag{2}$$

En donde χ_e se conoce como “susceptibilidad eléctrica” y es siempre igual o mayor a cero $\chi_e \geq 0$. Dos observaciones importanes: 1) El campo eléctrico $\vec{E}$ que está en la ecuación 2 es el *campo total*, es decir, el campo externo en el que este inmerso el material más el campo que genera la polarización. 2) Esa fórmula vale para dentro del medio dieléctrico. Fuera de él, en el resto del espacio, la polarización vale cero (lo cuál no significa a priori que el campo que genera también sea cero).

Veamos para entender como funciona esto, el caso de un capacitor de láminas paralelas que tiene un medio lineal entre las láminas.

3.1. Capacitor con un medio dieléctrico

Veamos el caso de la figura 2, en donde el medio entre las láminas es un dieléctrico con χ_e conocido. Supongamos que se carga al capacitor con una diferencia de potencial ΔV. ¿Cuánto vale la carga Q que se acumula en la chapa positiva del capacitor? ¿Cuál es la capacidad?

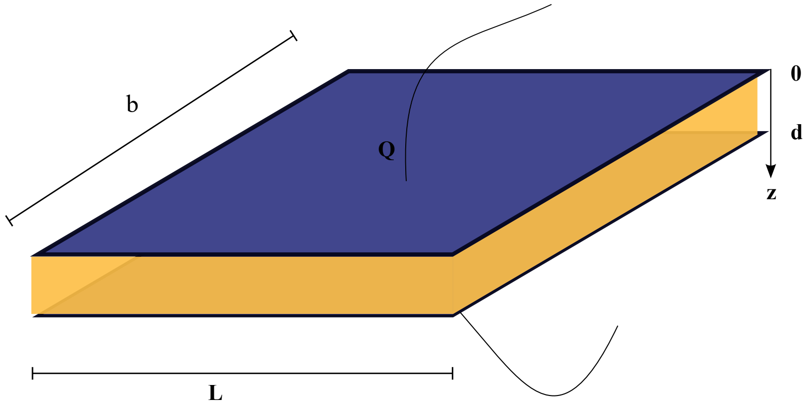

Figura 2: .

Para responder estas preguntas, necesitamos calcular el campo entre las placas. Como conocemos el área del capacitor, $A = b \times L$, sabemos la densidad superficial de carga que llamaremos $\sigma = \frac{Q}{A}$. El campo va a ser la suma de lo que generan las chapas conductoras y el que genera el dieléctrico al polarizarse. El campo de las chapas conductoras es $\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}$. Además, usando la ecuación 2, podemos asumir que la polarización es $\vec{\mathcal{P}}(z) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \chi_e E \hat{z}$, pero este E **es el campo total que aún no conocemos**. Con esa polarización, similar al caso que hicimos del electrete, podemos ver que aparecera una densidad de carga negativa en la superficie en $z = 0$ (y una positiva en la otra) del dieléctrico dada por

$$\sigma_p(z=0) = \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}|_{z=0} = -\epsilon_0 \chi_e E$$
$$\sigma_p(z=D) = \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}|_{z=D} = \epsilon_0 \chi_e E$$

Si llamo $\sigma_p = \epsilon_0 \chi_e E$ el campo dado *solamente* por la polarización es

$$\vec{E}_p = -\frac{\sigma_p}{\epsilon_0}\hat{z} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e E}{\epsilon_0}\hat{z} = -\chi_e E \hat{z}$$

.

El campo total, entonces, es la suma del campo que genera la carga σ del conductor más la carga σ_p del dieléctrico (ver figura 3):

$$\vec{E} = E\hat{z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z} - \chi_e E \hat{z} \Longrightarrow (1+\chi_e)E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0(1+\chi_e)} \tag{3}$$

Fíjense que recién acá pudimos despejar el valor de E que es el campo total que aparece. Si $\chi_e = 0$, recuperamos el caso sin dieléctrico. Mientras más grande sea la susceptibilidad, más chico será el campo.

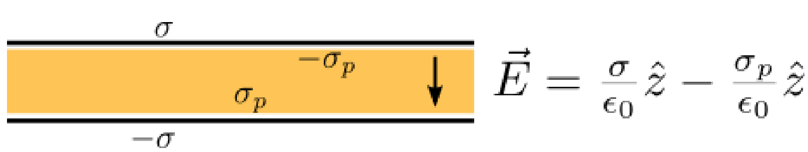

Figura 3: .

Veamos ahora como depende la carga de la diferencia de potencial:

$$\Delta V = V(0) - V(d) = \int_d^0 \vec{\nabla} V \, dz' = \int_0^d E \, dz' = \frac{\sigma}{\epsilon_0(1+\chi_e)} \int_0^d dz' = \frac{\sigma d}{\epsilon_0(1+\chi_e)} = \frac{Qd}{A\epsilon_0(1+\chi_e)}$$

$$\Longrightarrow Q = A\frac{\epsilon_0(1+\chi_e)}{d}\Delta V$$

De donde vemos que la capacidad resulta ser $C = A\frac{\epsilon_0(1+\chi_e)}{d}$. Vemos que para un ΔV fijo, la carga es más alta cuanto más alto sea χ_e. Esto justamente porque la capacidad aumenta con χ_e.

Por último, resolvamos el siguiente problema (es decir, calculemos la capacidad):

Figura 4: .

Ahora tenemos 2 regiones. La región I, entre 0 y $d-h$, en donde no hay dieléctrico. El campo acá lo conocemos:

$$\vec{E}_{\mathrm{I}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}$$

El campo en la región II, entre $d-h$ y d, en donde hay dieléctrico, es lo que calculamos en la ecuación 3:

$$\vec{E}_{\mathrm{II}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0(1+\chi_e)}\hat{z}$$

Con esto calculo ΔV:

$$\Delta V = \int_0^d E(z')\,dz' = \int_0^{d-h} E_{\mathrm{I}}(z')\,dz' + \int_{d-h}^{d} E_{\mathrm{II}}(z')\,dz' = (d-h)\frac{\sigma}{\epsilon_0} + h\frac{\sigma}{\epsilon_0(1+\chi_e)} = \left(d-h+\frac{h}{1+\chi_e}\right)\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Recordando de nuevo que $\sigma = Q/A$, podemos despejar la capacidad:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d-h+\frac{h}{1+\chi_e}}$$

Vemos que en el caso en que $h=0$ o $\chi_e = 0$ recuperamos el capacitor sin dieléctrico, mientras que en el caso $h=d$ recuperamos el caso que vimos antes.

Comentario final

El hecho de que la polarización dependa del campo en medios lineales, es decir que $\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}) = \epsilon_0\chi_e\vec{E}(\vec{r})$, permite resolver este problema y muchos más. Sin embargo, se vuelve algo engorroso hacer las cuentas por el hecho de que el campo que aparece en esa igualdad es el campo total, es decir el generado por las cargas de polarización originadas por $\vec{\mathcal{P}}$ más el generado por todas las demás cargas que haya en el problema (pueden ser fijas o estar en un conductor como vimos antes). Es decir, la polarización depende del campo total, que a su vez depende de la polarización...

Para sortear esta dificultad, y poder desarrollar estrategias claras para resolver los problemas, se define un nuevo campo que se llama desplazamiento eléctrico $\vec{D}$. Esto lo vamos a ver en detalle en la próxima clase.