Problema 1

a) Nos piden la carga contenida en el disco. Para esto hay que integrar la densidad σ sobre el disco:

$$Q = \int_{\text{disco}} \sigma(\vec{r}\,')\, dS' = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma_0 \, \cos\varphi' \, d\varphi' \, r' \, dr' = 0$$

porque la integral del $\cos\varphi$ entre 0 y 2π da cero. Osea que la carga total del disco es cero.

b) Para el campo, tenemos que recurrir al método de integración directa. La ley de Gauss no es de mucha ayuda acá porque el problema no tiene ninguna simetría que nos sirva. Por lo tanto hay que resolver esta integral:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{disco}} \sigma(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, dS' \tag{1}$$

En este caso, los puntos en los que queremos calcular el campo son los puntos $\vec{r} = z\hat{z}$, mientras que los puntos sobre los que tenemos que integrar (osea los puntos sobre el disco) son los $\vec{r}\,' = r'\hat{r}' = r'\cos\varphi'\hat{x} + r'\sin\varphi'\hat{y}$. Por lo tanto:

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = z\hat{z} - r'\cos\varphi'\hat{x} - r'\sin\varphi'\hat{y}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

Con esto tenemos todo para escribir la integral 1:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R r'\, dr' \sigma_0 \cos\varphi' \, \frac{z\hat{z} - r'\cos\varphi'\hat{x} - r'\sin\varphi'\hat{y}}{(z^2 + r')^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

Lo que simplifica bastante el problema es que las integrales en φ' se anulan en las direcciones $\hat{y}$ y $\hat{z}$, y solo es no nula la integral en $\hat{x}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R dr' \sigma_0 \cos^2\varphi' \, \frac{r'^2}{(z^2 + r')^3} \, dS' \; \hat{x} = \frac{-\sigma_o \pi \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr' \, \frac{r'^2}{(z^2 + r')^{3/2}} \, dS' \tag{3}$$

En la última igualdad ya hicimos la integral angular que da π. Nos queda una integral para la que usamos la siguiente integral de tabla:

$$\int \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \, dx = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \log\left(\sqrt{a^2 + x^2} + x\right) + C$$

Si ponemos x como r' y a como z, nos queda resuelto el campo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-\sigma_o \pi \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \log\left(\frac{\sqrt{z^2 + R^2} + R}{z} \right) \right] \tag{4}$$

c) Bueno ya sabemos que el momento monopolar es cero (la carga). Veamos el momento dipolar:

$$\vec{p} = \iint_{\text{disco}} \sigma(\vec{r}) \; \vec{r}\,' \, dS' = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma_0 \cos\varphi' \, r'\hat{r}\,' \; d\varphi' \, r' \, dr'$$

Ahora, nuevamente, la integral en $\hat{y}$ va a dar cero mientras que la integral en $\hat{x}$ es la que genera el resultado:

$$\vec{p} = \sigma_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \cos^2(\varphi')\, r'^2 \hat{x} \; d\varphi' \, dr' = \sigma_0 \pi \hat{x} \int_0^R r'^2 \; dr' = \frac{\sigma_0 \pi R^3}{3} \hat{x}$$

d) Para esto tenemos que hacer 2 cosas. En 1er lugar, desarrollar lo que calculamos en b) en el límite en que $z \gg R$ es decir $z/R \ll 1$.

Las 2 expresiones a desarrolar son las que estan entre los corchetes en 4:

$$-\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}} = -R(z^2+R^2)^{-\frac{1}{2}} = -R\,z^{-1}\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx -R\,z^{-1}\left(1-\frac{R^2}{2z^2}\right) = -\frac{R}{z}+\frac{R^3}{2z^3}$$

y por otro lado

$$\log\left(\frac{\sqrt{z^2+R^2}+R}{z}\right) \approx \frac{R}{z}-\frac{R^3}{6z^3}$$

Esto ultimo sale con la fórmula de la ayuda. Ahora podemos escribir el campo que calculamos para $z \gg R$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-\sigma_o\pi\hat{x}}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{R}{z}+\frac{R^3}{2z^3}+\frac{R}{z}-\frac{R^3}{6z^3}\right] = \frac{-\sigma_o\pi\hat{x}}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^3}{3z^3} \tag{5}$$

Si ahora usaramos la fórmula que nos dan de la expansión multipolar:

$$\vec{E}\,(\vec{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}}{r^3}+\mathcal{O}(\frac{1}{r^4})$$

debería darnos lo mismo. Veamos. En este caso la dirección en la que calculamos el campo es $\hat{z}$, osea que el versor $\hat{r}$ en el desarrollo multipolar es $\hat{z}$. Así que tenemos que $\vec{p}\cdot\hat{z}=0$ (recordemos que el momento dipolar lo calculamos y apunta en $\hat{x}$). Además ya vimos que $Q=0$. Bueno entonces nos queda:

$$\vec{E}\,(\vec{r}) \approx \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}}{z^3} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma_0\pi R^3}{3z^3}\hat{x}$$

que coincide con lo que habíamos calculado en 5.

Problema 2

Antes de empezar, notemos que el problema tiene simetría esférica. Todas las cargas y medios involucrados cumplen esa simetría. Por lo tanto, esa misma simetría cumplirán los campos $\vec{E}$, $\vec{D}$ y $\vec{P}$. Todos apuntan en direcció radial y dependen solamente de la coordenada radial.

a) Nos piden calcular $\vec{E}$, $\vec{D}$ y $\vec{P}$. Como en el problema la única fuente de $\vec{D}$ son las cargas libres, empecemos por ahí. En realidad, para decir eso tenemos que chequear que el rotor de $\vec{D}$ es cero, pero en este caso eso vale, porque solo hay un dielectrico lineal y en ese caso $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ y $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{D}=0$.

Bueno veamos las cargas libres. La única en este problema es la carga de la esfera maciza. Así que tenemos que calcular $\vec{D}$ a partir de $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$. Esto es el campo de una esfera maciza (sin el ε_0):

$$\vec{D}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3}\hat{r} & r \le a \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} & r \ge a \end{cases}$$

En donde $Q=\frac{4}{3}\pi\rho$. Con esto podemos calcular el campo eléctrico. En la región con dieléctrico ($a<r<b$) vale $\vec{E}=\vec{D}/\varepsilon$ y en las regiones sin dieléctrico vale $\vec{E}=\vec{D}/\varepsilon_0$:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} & r<a \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\ r^2}\ \hat{r} & a<r<b \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\ r^2}\ \hat{r} & r>b \end{cases}$$

Finalmente, para la polarización tenemos que vale cero fuera del dieléctrico, y $\vec{P}=\epsilon_0\chi_e\vec{E}$ en el dieléctrico:

$$\vec{P}(r) = \begin{cases} \vec{0} & r < a \\ \\ \dfrac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\varepsilon \; r^2} \; \hat{r} & a < r < b \\ \\ \vec{0} & r > b \end{cases}$$

Y recordemos que $\chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1$.

b) Tenemos que calcular las densidades de carga de polarización. Como conocemos $\vec{P}$, podemos hacerlo. La densidad en volumen se calcula como $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$. Usando la divergencia en coordenadas esféricas vemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 P_r \right) \propto \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

Por lo tanto no hay cargas en volumen. La densidad de carga de superficie se cualcula como $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$, y hay que hacerlo en la superficie interna ($r = a$) y externa ($r = b$):

$$\sigma_p(r = a) = \vec{P}(a) \cdot (-\hat{r}) = -\frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\varepsilon \; a^2} \; \hat{r} \cdot \hat{r} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\varepsilon \; a^2}$$

$$\sigma_p(r = b) = \vec{P}(a) \cdot \hat{r} = \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\varepsilon \; a^2} \; \hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\varepsilon \; b^2}$$

Por ultimo, nos piden demostrar que la carga total de polarización inducida es cero. Bueno para eso tenemos que sumar las cargas superficiales (no las densidades):

$$Q_p = Q_p(a) + Q_p(b) = 4\pi a^2 \; \sigma(r = a) + 4\pi b^2 \; \sigma(r = b) = -\frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{\varepsilon} + \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{\varepsilon} = 0$$

c) Se reemplaza la esfera maciza de carga por una esfera conductora a potencial V_0. Sabemos que por ser conducor, el campo en su interior sera nulo. Por lo tanto, dentro del conductor $\vec{E} = 0$, y como allí tampoco hay polarización tenemos $\vec{D} = \vec{P} = 0$. Si hay cargas sobre el conductor (que seran proveídas por la conexión a V_0), estas cargas se distribuirán en superficie. Llamemos a esta carga (por ahora desconocida) como Q_c. Para la región externa al conductor (incluido el dieléctrico) tendremos los mismos campos que en los items anteriores, solo que en vez de tener Q tendremos Q_c. Por ejemplo, el campo eléctrico será:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & r < a \\ \\ \dfrac{Q_c}{4\pi\varepsilon \; r^2} \; \hat{r} & a < r < b \\ \\ \dfrac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 \; r^2} \; \hat{r} & r > b \end{cases}$$

Claro que tenemos que calcular Q_c para completar la resolución de este item. Para eso, utilizamos los dos valores del potencial que conocemos: $V(a) = V_0$ y $V(\infty) = 0$, y entonces:

$$V_0 - V_\infty = V(a) - 0 = \int_\infty^a \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^\infty E(r) \cdot dr$$

que es una integral que hay que hacer en partes:

$$V_0 = \int_a^\infty E(r) \cdot dr = \int_a^b E(r) \cdot dr + \int_b^\infty E(r) \cdot dr = \int_a^b \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon \; r^2} \; dr + \int_b^\infty \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 \; r^2} \; dr = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{b}$$

Y despejamos Q_c:

$$Q_c = \frac{4\pi V_0}{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{\varepsilon_0 a}}$$

Notemos que depende del dieléctrico!

Problema 3

a) Para calcular las corrientes, resulta útil ver que efecto tiene el capacitor en el circuito. Como está cargado, por esa rama ya no cricula más corriente. Por lo tanto, es como que la rama del capacitor no estuviera, al menos en lo que el calcula de las corrientes se refiere. Por lo tanto, lo podemos "borrar"por ahora y definir corrientes i_1, i_2, i_3 como en la figura 1:

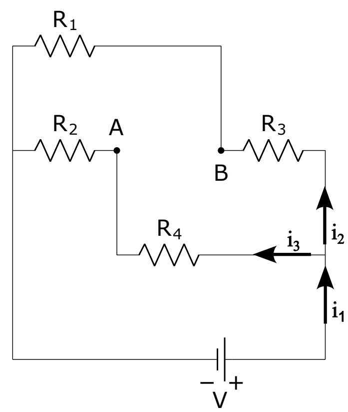

Figura 1: Circuito sin el capacitor y con las corrientes definidas.

Usando la ley de Kirchhof para el nodo donde estan dibujadas las corrientes, se ve que $i_1 = i_2 + i_3$. Necesitamos dos ecuaciones más, para eso recorremos el circuito de las siguientes maneras:

- Escribimos las caídas de potencial en el recorrido *batería* $- R_4 - R_2 -$ *batería* que nos da lo siguiente:

$$V - i_3 R_4 - i_3 R_2 = 0 \Longrightarrow i_3 = \frac{V}{R_2 + R_4}$$

- Escribimos las caídas de potencial en el recorrido *batería* $- R_3 - R_1 -$ *batería* que nos da lo siguiente:

$$V - i_2 R_3 - i_2 R_1 = 0 \Longrightarrow i_2 = \frac{V}{R_1 + R_3}$$

por lo que podemos escribir las tres corrientes (dado que $i_1 = i_2 + i_3$):

$$i_1 = \frac{V}{R_1 + R_3} + \frac{V}{R_2 + R_4}$$
$$i_2 = \frac{V}{R_1 + R_3}$$
$$i_3 = \frac{V}{R_2 + R_4}$$

Entonces, tenemos las corrientes que circulan sobre cada componente. Sobre la batería circula i_1, sobre R_4 y R_2 circula i_3 y sobre R_1 y R_3 circula i_2. Sobre el capacitor habíamos dicho ya que no circula corriente.

b) Nos piden el potencial en los puntos A y B. Para eso, podemos pararnos en algun punto en donde conozcamos el potencial y ver las caidas hasta esos puntos.

Para calcular V_A, partimos de la terminal positiva de la batería en donde el potencial es V, y vemos que para llegar a A tenemos la caída de potencial en la resistencia R_4:

$$V_A = V - i_3 R_4 = V - \frac{V\,R_4}{R_2 + R_4} = V\frac{R_2}{R_2 + R_4}$$

Para calcular V_B, partimos de la terminal positiva de la batería en donde el potencial es V, y vemos que para llegar a B tenemos la caída de potencial en la resistencia R_3:

$$V_B = V - i_2 R_3 = V - \frac{V\, R_3}{R_1 + R_3} = V \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

c) Nos piden ahora la carga en el capacitor. Para esto, tenemos que asignar una carga Q a alguna de las 2 placas del capacitor, y a la otra $-Q$. Esto es arbitrario, puedo elegir cualquier de las dos. Hagámoslo como en la figura 2:

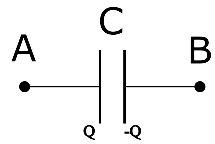

Figura 2: Capacitor con carga asignada a cada lado

Bueno apliquemos la fórmula de la capacidad, que relaciona la carga con la diferencia de potencial:

$$Q = c\,\Delta V = c(V_A - V_B) = c\,V\left[\frac{R_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_3}\right]$$

Para la energía podemos usar que $U = \frac{1}{2}c\Delta V^2 = \dfrac{Q^2}{2c}$:

$$U = \frac{Q^2}{2c} = \frac{1}{2}c\,V^2\left[\frac{R_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_3}\right]^2$$

Fin.