Problema 3

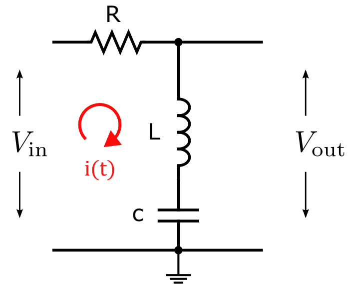

Figura 1: Circuito con la corriente definida.

a)

Definamos una tensión de entrada compleja $V_{\text{in}} = V_0 e^{j\omega t}$, y una corriente $I = I_0 e^{j\omega t}$. La relación entre estas magnitudes es $V_{\text{in}} = ZI$ en donde Z es la impedancia total del circuito, que es la suma de la de los 3 componentes $Z = R + j(\omega L - 1/\omega c)$ (porque están en serie). Por lo tanto la corriente resulta $I = Z^{-1}V_{\text{in}}$. Conviene re-escribirlo con la impedancia en forma exponencial:

$$I = Z^{-1}V_{\text{in}} = \frac{V_0}{|Z|}e^{-j\phi}e^{j\omega t} \Longrightarrow i(t) = \text{Re}\,[I] = \frac{V_0}{|Z|}\cos\left(\omega t - \phi\right)$$

En donde usamos que $Z = |Z|\,e^{j\phi}$ con $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega c)^2}$ y $\phi = \arctan(\frac{\omega L - 1/\omega c}{R})$.

b)

¿Cuánto vale V_{out}? Hay dos formas de pensarlo: como la tensión de entrada V_{in} menos la caída de tensión en la resistencia ($V_{\text{out}} = V_{\text{in}} - IR$) o como la caída de tensión en la rama del inductor y el capacitor ($V_{\text{out}} = I(Z_c + Z_L)$). Ambbás son equivalentes y dan el mismo resultado porque por Kirchhof

$$V_{\text{in}} - IR - Z_L I - Z_c I = 0 \Longrightarrow V_{\text{in}} - IR = I(Z_c + Z_L)$$

. Entonces tenemos que

$$V_{\text{out}} = (Z_L + Z_c)I = (Z_L + Z_c)\frac{V_0}{|Z|}e^{j(\omega t - \phi)} = j(\omega L - 1/\omega c)\frac{V_0}{|Z|}e^{j(\omega t - \phi)} = (\omega L - 1/\omega c)\frac{V_0}{|Z|}e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}$$

y de ahí se ve que la diferencia de fase es $-\phi + \pi/2$. En el caso particular en que $R = \omega L - 1/\omega c$ tenemos que $\phi = \arctan 1 = \pi/4$ y entonces la diferencia de fase es $-\pi/4 + \pi/2 = \pi/4$.

c)

Tenemos que calcular ahora $\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}}$ y tomarle módulo. Entonces:

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{(\omega L - 1/\omega c)\frac{V_0}{|Z|}e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}}{V_0 e^{j\omega t}} \Longrightarrow T(\omega) = \frac{|V_{\text{out}}|}{|V_{\text{in}}|} = \frac{|\omega L - 1/\omega c|}{|Z|} = \frac{|\omega L - 1/\omega c|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega c)^2}}$$

d)

¿Cómo se comporta $T(\omega)$? Para empezar, se anula para $\omega = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$, que es también la frecuencia de resonancia del LCR serie. Conviene entonces definir $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$. Por otro lado, en los límites en los que $\omega \to 0$ o $\omega \to \infty$ tenemos que $T(\omega) \to 1$. Entonces, la tensión de salida se anula para $\omega = \omega_0$, mientras que es igual a la tensión de entrada para frecuencias bajas o frecuencias altas. Esto ya nos da la idea de que hay un cierto *ancho de banda* alrededor de ω_0 que el circuito rechaza.

Veamos como se puede estimar el ancho. Para eso, buscamos los valores de ω para los cuales $T^2(\omega) = 1/2$ (el ancho es algo arbitrario que hay que definir de alguna manera, en estos casos lo definimos como los valores para los cuales la transmisión al cuadrado, la potencia transmitida, cae a la mitad). Bien entonces tenemos que

$$T^2(\omega) = \frac{(\omega L - 1/\omega c)^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega c)^2} = \frac{1}{2}$$

así que

$$\begin{aligned} 2\left(\omega L - 1/\omega c\right)^2 &= R^2 + (\omega L - 1/\omega c)^2 \\ \left(\omega L - 1/\omega c\right)^2 &= R^2 \\ \omega L - 1/\omega c &= \pm R \end{aligned} \tag{1}$$

Si bien de ahí se pueden despejar los valores deseados, conviene hacer la siguiente aproximación para tener un resultado más amigable. Resulta útil escribir $\omega L - 1/\omega c = L\,\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}$. Si estamos en la condición en que $\frac{\omega - \omega_0}{\omega} \ll 1$ resulta que también vale que $\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \approx 2(\omega - \omega_0)$. Así que nos queda ahora lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2L(\omega - \omega_0) &= \pm R \\ \omega_\pm &= \omega_0 \pm \frac{R}{2L} \end{aligned}$$

Osea que encontramos los valores ω_+ y ω_-, para los cuales la transmisión al cuadrado cae a la mitad. La diferencia entre esos valores nos da el ancho:

$$\omega_+ - \omega_- = \Delta\omega = \frac{R}{L}$$

.

Entonces, tenemos que la transmisión vale uno excepto para valores de la frecuencia de entrada que se encuentren en un rango $\Delta\omega = \frac{R}{L}$ de la frecuencia de resonancia $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$.

Por ejemplo, si tenemos una inductancia de $L = 0{,}1\,\mu$H con una capacitancia de $c = 1$nF y una resistencia de $R = 2\,\Omega$, tendremos $\omega_0 = 100$MHz y $\Delta\omega = 20$MHz y un gráfico como se ve a continuación:

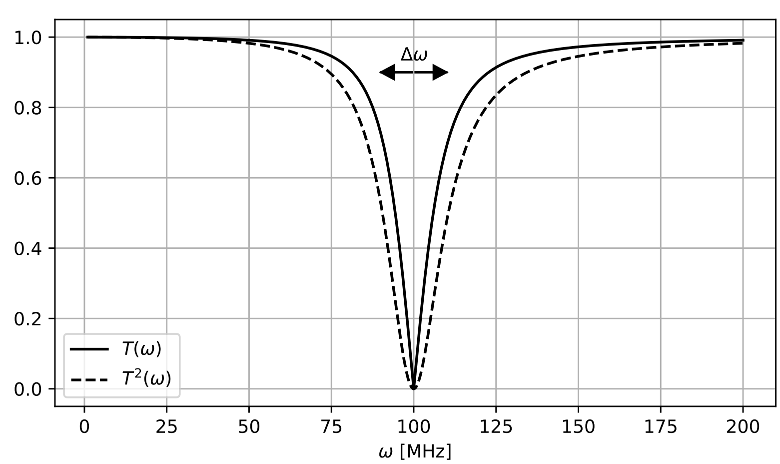

Figura 2: Grafico de $T(\omega)$.