Capacitancias, geometría y simetría *

Ariel Chernomoretz

September 12, 2019

Consideremos un sistema de N conductores inmersos en un volumen interno a una superficie S_{N+1} (que puede estar en el infinito). Como vimos en clase, en el equilibrio, sobre el conductor i-esimo aparecerá una densidad superficial de carga:

$$\sigma_i = \epsilon_0 \vec{E}.\hat{n}_i = -\epsilon_0 \vec{\nabla} V.\hat{n}_i \tag{1}$$

con $i = 1, ..., N, N+1$.

Al mismo tiempo, la carga total sobre cada conductor puede escribirse como

$$Q_i = \oiint_{S_i} \sigma_i dS = -\epsilon_0 \oiint \vec{\nabla} V.\hat{n}_i dS \tag{2}$$

.

Vamos a definir S_T como la superficie compuesta por la unión de todas las S_i. El potencial dentro del volumen V_T, que tiene como frontera a S_T debe satisfacer la ecuación de Laplace, con las condiciones de contorno apropiadas:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{3}$$

$$V|_{S_i} = v_i \ , i = 1, ..., N+1 \tag{4}$$

Debido a que la ecuación de Laplace es lineal, la solución del problema original puede pensarse como superposición de soluciones a subproblemas auxiliares donde, alternativamente, todos menos un conductor se ponen a tierra.

$$V = \sum_{j=1}^{N+1} v_j f_j \tag{5}$$

*Este desarrollo esta basado en el trabajo "The geometrical nature and some properites of the capacitance coefficients based on Laplace's equation,Herrera Diaz, Am journal of Physics, 76, 2008 donde f_j son funciones que satisfacen:

$$\nabla^2 f_j = 0 \quad , f_j|_{S_i} = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, ..., N+1) \tag{6}$$

Importante: notar que las condiciones de contorno 6 implican que, para cada subproblema, el conductor j-esimo se encuentra a potencial unidad, mientras que el resto se fijan a potencial nulo. En estas condiciones de lo único que puede depender la función f_j es de la geometría (forma y posición relativa) de las superficies conductoras del problema.

Apliquemos el operador gradiente a la ec 5.

$$\vec{\nabla} V = \sum_{j=1}^{N+1} v_j \vec{\nabla} f_j \tag{7}$$

utilizando esta última expresión en 2

$$\begin{aligned} Q_i &= -\epsilon_0 \oiint \vec{\nabla} V . \hat{n}_i dS = -\epsilon_0 \oiint \sum_{j=1}^{N+1} v_j \vec{\nabla} . f_j . \hat{n}_i dS & (8) \\ &= \sum_{j=1}^{N+1} \left(-\epsilon_0 \oiint \vec{\nabla} . f_j . \hat{n}_i dS \right) v_j & (9) \end{aligned}$$

.

De esta manera llegamos a que cargas y potenciales se encuentran relacionados mediante la expresión

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N+1} C_{ij} v_j \tag{10}$$

con

$$C_{ij} \equiv -\epsilon_0 \oiint \vec{\nabla} . f_j . \hat{n}_i dS \tag{11}$$

donde se puede ver que los coeficientes C_{ij} son de naturaleza estrictamente geométrica.

Mostremos ahora que $C_{ij} = C_{ji}$.

$$C_{ij} = -\epsilon_0 \oiint_{S_i} \vec{\nabla} . f_j . \hat{n}_i dS = -\epsilon_0 \oiint_{S_T} f_i \vec{\nabla} . f_j . \hat{n}_i dS \tag{12}$$

Notar que la integración del último miembro es sobre todas las superficies que conforman S_T y vale la igualdad porque $f_i|_{S_i} = 1$ sobre el conductor i-esimo y cero en el resto.

Utilizando Gauss

$$
\begin{aligned}
C_{ij} &= -\epsilon_0 \int_{V_T} \vec{\nabla}.(\, f_i \vec{\nabla}.f_j)\, dv & (13)\\
&= -\epsilon \int_{V_T} (\, \vec{\nabla} f_i.\vec{\nabla} f_j + f_i \nabla^2 f_j)\, dv & (14)\\
&= -\epsilon \int_{V_T} \vec{\nabla} f_i.\vec{\nabla} f_j dv & (15)
\end{aligned}
$$

Esta última expresión implica que los C_{ij} son simétricos: i.e.

$$C_{ij} = C_{ji}$$