Fuerza sobre un dieléctrico

Consideremos un material dieléctrico en presencia de un campo eléctrico externo $\vec{E}(\vec{r})$. Como vimos en clase, aparecerá en cada diferencial de volumen un momento dipolar $\delta\vec{p}$ sobre el que actuará una fuerza:

$$\delta\vec{F} = (\delta\vec{p}.\vec{\nabla})\vec{E} = \delta v(\vec{P}.\vec{\nabla})\vec{E}$$

donde $\vec{P}(\vec{r})$ es la densidad de momento dipolar inducida en el material. La fuerza total que actua por lo tanto sobre el material resulta:

$$\vec{F} = \int dv(\vec{P}.\vec{\nabla})\vec{E} = \int dv\frac{\epsilon_0\chi}{2}(\vec{E}.\vec{\nabla})\vec{E}$$

donde el miembro derecho es el resultado de asumir, como lo haremos, que estamos en presencia de un material lineal, homogéneo e isótropo.

La siguiente identidad matemática nos será de ayuda para interpretar el último resultado.

$$\vec{\nabla}A^2 = \vec{\nabla}(\vec{A}\vec{A}) = 2(\vec{A}\vec{\nabla})\vec{A} + 2\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

y por lo tanto

$$\vec{\nabla}E^2 = 2(\vec{E}\vec{\nabla})\vec{E}$$

Esta última igualdad nos permite expresar a la fuerza sobre el dieléctrico como:

$$\vec{F} = \frac{\epsilon_0\chi}{2}\int dv\vec{\nabla}E^2$$

y darnos cuenta que la fuerza sobre el dieléctrico surgirá de integrar contribuciones diferenciales que tienen la dirección del gradiente del campo escalar $E^2(\vec{r})$ por lo que es de esperar que dicha fuerza apunte en la dirección de mayor incremento de la intensidad del campo, independientemente de la polaridad del mismo.

Para seguir adelante tengamos en cuenta la siguiente identidad matemática (definición intrínseca de gradiente):

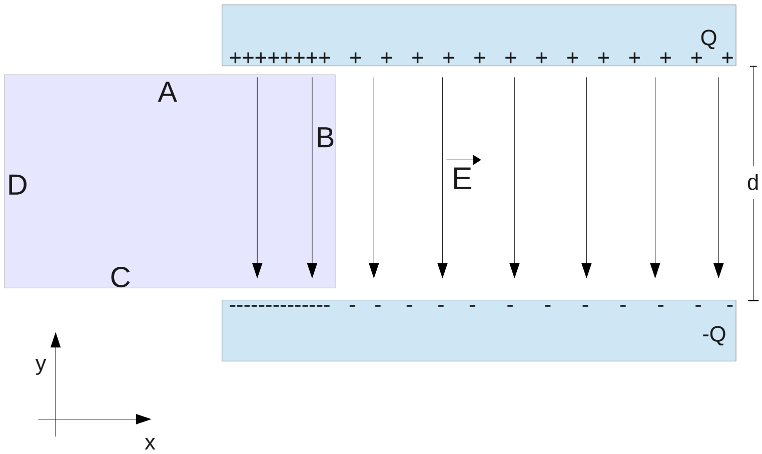
$$\int dv\vec{\nabla}.\lambda = \oint \vec{ds}\lambda$$

que nos permite expresar ahora la fuerza sobre el dieléctrico según:

$$\vec{F} = \frac{\epsilon_0\chi}{2}\int dv\vec{\nabla}E^2 = \frac{\epsilon_0\chi}{2}\oint \vec{ds}E^2$$

Vemos entonces que podemos tambien pensar a la fuerza resultante en función de contribuciones normales a la superficie del dieléctrico de modulo $E^2(\vec{r})$.

Con todo lo desarrollado analicemos la fuerza que actúa sobre un material dieléctrico lineal, isótropo y homogéneo, semi insertado entre las placas de un capacitor aislado y cargado con carga Q como muestra la figura. Asumiremos



la presencia de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = -E_0\hat{y}$ dentro del capacitor, y que $\vec{E} \sim 0$ fuera del mismo.

Para encontrar la fuerza actuante sobre el dieléctrico consideremos:

$$\vec{F} = \frac{\epsilon_0\chi}{2}\oint \vec{ds}E^2 \tag{1}$$

$$= \frac{\epsilon_0\chi}{2}\Big(\int_{S_A} dsE^2\hat{y} + \int_{S_B} dsE^2\hat{x} - \int_{S_C} dsE^2\hat{y} - \int_{S_D} dsE^2\hat{y} + ...\Big) \tag{2}$$

donde ... representa las contribuciones en $\hat{z}$ de las caras frontal y posterior. Las fuerzas respectivas, por simetría, y al igual que lo que sucede en la dirección $\hat{y}$, se compensan y anulan por lo que finalmente

$$\vec{F} = \frac{\epsilon_0\chi}{2}\Big(\int_{S_B} dsE^2 - \int_{S_D} dsE^2\Big)\hat{x} \sim \frac{\epsilon_0\chi}{2}\int_{S_B} dsE^2\hat{x}$$

debido a que $E^2|_B >> E^2|_D$.

Finalmente resulta

$$\vec{F} \sim \frac{\epsilon_0\chi}{2}Sup.Lat_B\Big(\frac{\Delta V}{d}\Big)^2\hat{x}$$