Regimen transitorio RLC

Brevísima y sesgada introducción para Física 3

Ariel Chernomoretz

November 23, 2023

1 Introducción

Vamos a analizar la dinámica temporal de la corriente en el circuito RLC de la figura.

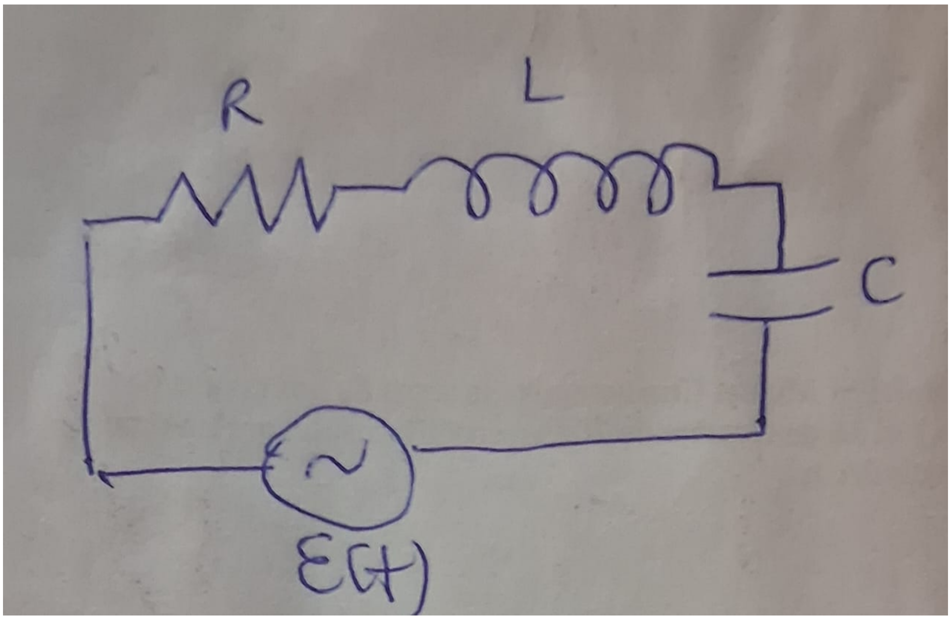

Figure 1: d

Para el caso general de una fem variable en el tiempo, hemos visto en clase que la circulación del campo eléctrico a lo largo del circuito RLC que se esquematiza en la figura 1 cumple que :

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = \iint_{S(C)} \vec{\nabla} \times \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \tag{1}$$

Ahora bien: dicha ciculacion resulta de contribuciones que vamos encontrando debido al campo que atraviesa los distintos componentes del circuito: cables, capacitor, resistencia y fem (notar que a los efectos del campo eléctrico, la bobina es un cable). Notar ademas que para los cables podemos considerar que el aporte es nulo ya que $E_{cable} = j/\sigma_{cable}$, y $\sigma_{cable} \to \infty$.

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = \cancel{\int_{cable} \vec{E}.\vec{dl}} + \int_{resistencia} \frac{\vec{j}}{\sigma}.\vec{dl} + \int_{capacitor} \frac{Q}{Cd}.\vec{dl} - \int_{fem} F_{NC}/q.\vec{dl} \quad (2)$$

$$= iR + \frac{Q}{C} - \epsilon \quad (3)$$

A partir de las ecuaciones 1 y 3 por lo tanto resulta :

$$\epsilon(t) = \frac{Q(t)}{C} + i(t)R + L\frac{di}{dt} \quad (4)$$

ecuación que rige la dinamica de la corriente que circula y la carga Q acumulada en las placas del capacitor. Dichas cantidades no son independientes ya que $i(t) = \frac{dQ}{dt}$.

2 Transitorio

Vamos a considerar el caso que se ilustra en la figura **??**,en el que la dependencia temporal del voltaje de la fem es de tipo escalón: $\epsilon(t) = \epsilon_0\Theta(t)$

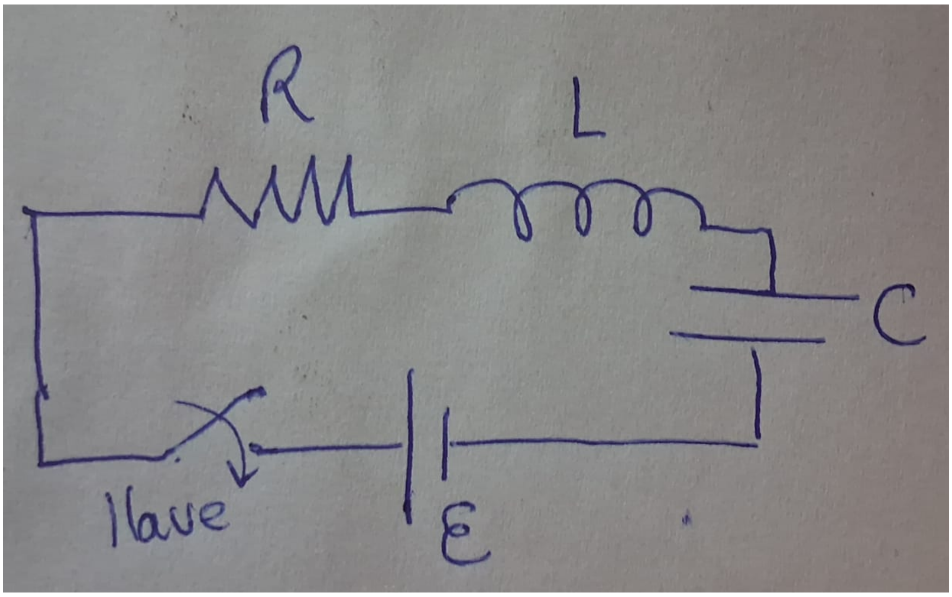

Figure 2: d

La ecuación que rige la dinámica del circuito es:

$$\epsilon = R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q + L\frac{d^2Q}{dt^2}$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden a coeficientes constantes cuya solución puede escribirse como suma de dos funciones, soluciones del problema homogéneo y particular respectivamente:

$$Q(t) = Q_H(t) + Q_P(t)$$

Como es usual, proponemos como $Q_P(t)$ a una función que presente la misma dependencia temporal que el término de 'forzado', que en este caso es constante para $t > 0$, por lo que $Q_P(t) = cte$

$Q_H(t)$, por otra parte es solución de:

$$0 = R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q + L\frac{d^2Q}{dt^2}$$

Para resolver esta ultima ecuacion, proponemos la siguiente dependencia temporal: $Q_H(t) = Ae^{\lambda t}$ que es solución de la ecuación de arriba siempre y cuando ocurra que utilicemos λ:

$$\lambda_{\pm} = -\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}_{\beta}$$

2.1 Circuitos con disipación, $R \neq 0$

Existen 3 regimenes cualitativamente diferente para Q_H en este caso, dependiendo de la relación entre los parametros del circuito: $\alpha \equiv \frac{R}{2L}$ y $\omega_0^2 \equiv \frac{1}{LC}$ que define si β es un número real, complejo o nulo.

2.1.1 Regimen sobreamortiguado

Cuando $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ estamos en un regimen dominado por la disipacion. En este caso $\beta \in \Re$ por lo que $\lambda_{\pm} \in \Re$ y:

$$\begin{aligned} Q_H(t) &= A_+e^{\lambda_+ t} + A_-e^{\lambda_- t} && (5) \\ &= e^{-\alpha t}\left(A_+e^{\beta t} + A_-e^{-\beta t}\right) && (6) \end{aligned}$$

La solucion completa para $Q(t)$ resulta entonces:

$$Q(t) = \epsilon C + e^{-\alpha t}\left(A_+ e^{\beta t} + A_- e^{-\beta t}\right) \tag{7}$$

y la intensidad de corriente $i(t) = \frac{dQ}{dt}$ por tanto resulta:

$$i(t) = (-\alpha + \beta)A_+ e^{\beta t} e^{-\alpha t} + (-\alpha - \beta)A_- e^{-\beta t} e^{-\alpha t} \tag{8}$$

Los dos parametros libres, A_+, A_- de las ecuaciones 7 y 8 quedan determinados especificando condiciones iniciales para la carga del capacitor ($Q(t=0) = Q_0$) y la intensidad ($i(t=0) = i_0$). Por ejemplo supongamos una situación donde inicialmente el capacitor esta cargado y no hay corriente circulando inicialmente $i_0 = 0$. En este caso

$$\begin{aligned} Q(t=0) &= \epsilon C + A_+ + A_- = q_0 & (9) \\ i(t=0) &= -\alpha(A_+ + A_-) + \beta(A_+ - A_-) = 0 & (10) \end{aligned}$$

Despejando resulta:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \epsilon C + e^{-\alpha t}\left(\underbrace{\frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2}}_{\cosh(\beta t)} + \frac{\alpha}{\beta}\underbrace{\frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2}}_{\sinh(\beta t)}\right) & (11) \\ &= \epsilon C + e^{-\alpha t}\left(\cosh(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\sinh(\beta t)\right) & (12) \\ i(t) &= -\frac{\omega_0^2}{\beta} Q_0 e^{-\alpha t}\sinh(\beta t) & (13) \end{aligned}$$

Recordemos que estamos en un regimen donde $\beta^2 = \alpha^2 - w_0^2 > 0$ y por tanto $\alpha > \beta$. Esto implica que $Q(t \to \infty) \to \epsilon C$. De hecho es facil ver que

$$Q(t) \sim \frac{Q_0}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} e^{-(\alpha - \beta)t}\right)$$

por lo que el decaimiento ocurre en una escala temporal dada por $\tau = \frac{1}{\alpha - \beta}$.

Por otra parte $i(t \to \infty) \to 0$. En la figura 3 ilustramos el comportamiento de estas variables. Observamos como la carga 'extra' inicial del capacitor da lugar a una intensidad de corriente que se disipa en la resistencia y eventualmente se anula.

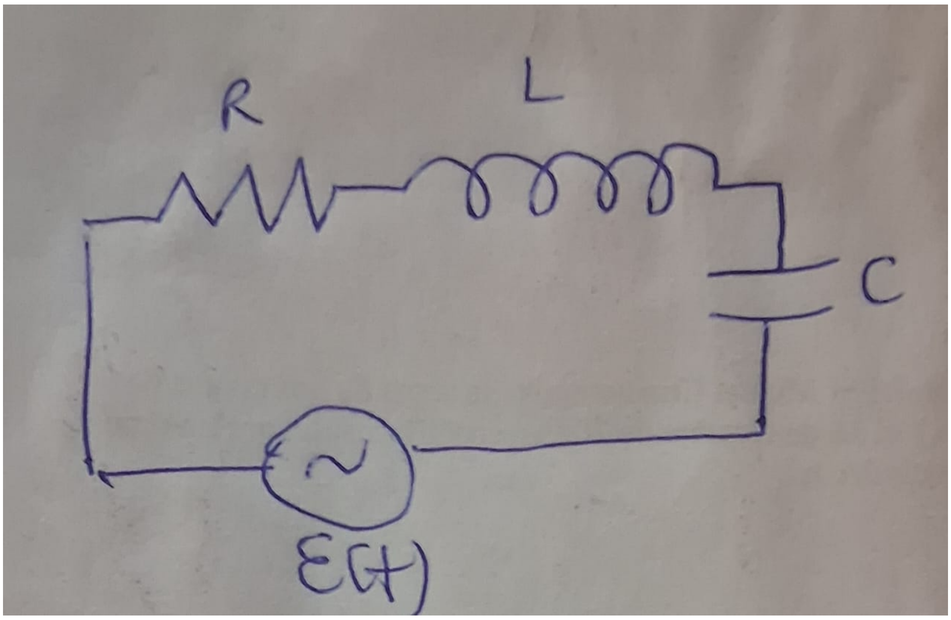

Figure 3: d

2.1.2 Regimen crítico

Sucede cuando los parametros del problema son tales que $\beta = 0$. En este caso $\lambda_+ = \lambda_- = -\alpha$ es una raiz doble y las soluciones resultan combinaciones lineales de: $e^{-\alpha t}$ y $te^{-\alpha t}$. Para el caso del ejemplo anterior ($Q(t=0) = Q_0$ y e $i(t=0) = i_0$) se tiene que la solución toma la forma:

$$Q(t) = \epsilon C + Q_0(1+\alpha t)e^{-\alpha t} \quad (14)$$

$$i(t) = -\alpha^2 Q_0 t e^{-\alpha t} \quad (15)$$

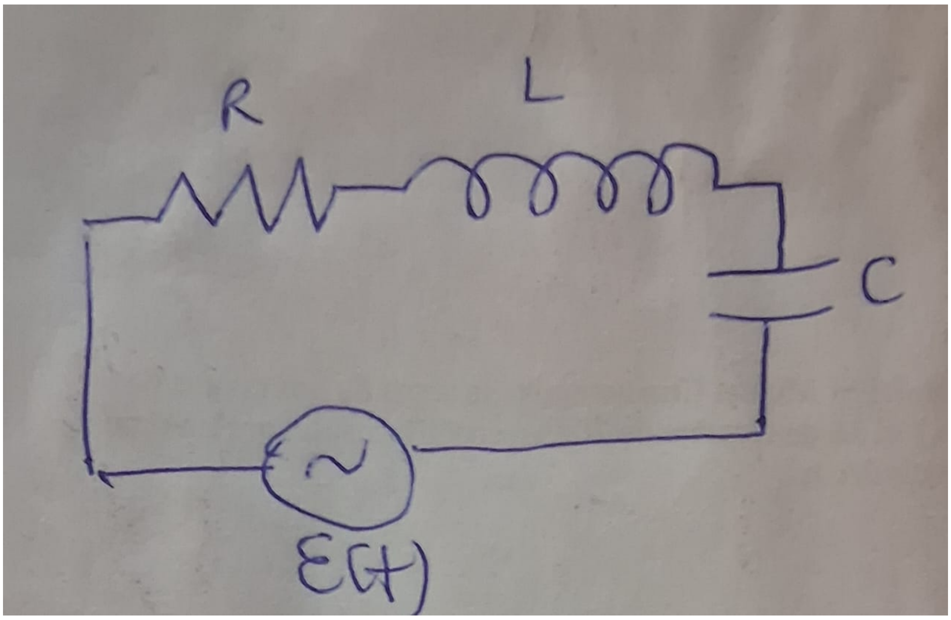

Figure 4: d

Este regimen se caracteriza por un tiempo $\tau_{critico} = \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\alpha-\beta} = \tau_{sobreamortiguado}$

2.1.3 Regimen subamortiguado

Cuando $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, β se vuelve un numero imaginario:

$$\beta = i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}_{\omega} = i\omega$$

por lo que resulta:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \epsilon C + A_+ e^{-\alpha t} e^{i\omega t} + A_- e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} && (16) \\ i(t) &= (-\alpha + i\omega) A_+ e^{-\alpha t} e^{i\omega t} + (-\alpha - i\omega) A_- e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} && (17) \end{aligned}$$

Si nuevamente consideramos el caso del ejemplo anterior ($Q(t=0) = Q_0$ y e $i(t = 0) = i_0$) se tiene que la solución toma la forma:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \epsilon C + Q_0 e^{-\alpha t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right) && (18) \\ i(t) &= -\frac{\omega_0^2}{\omega} Q_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t) && (19) \end{aligned}$$

Tanto la carga del capacitor como la corriente oscilan con frecuencia ω y experimentan una disminución exponencial de la amplitud con que lo hacen con una constante de tiempo $\tau = \frac{1}{\alpha}$

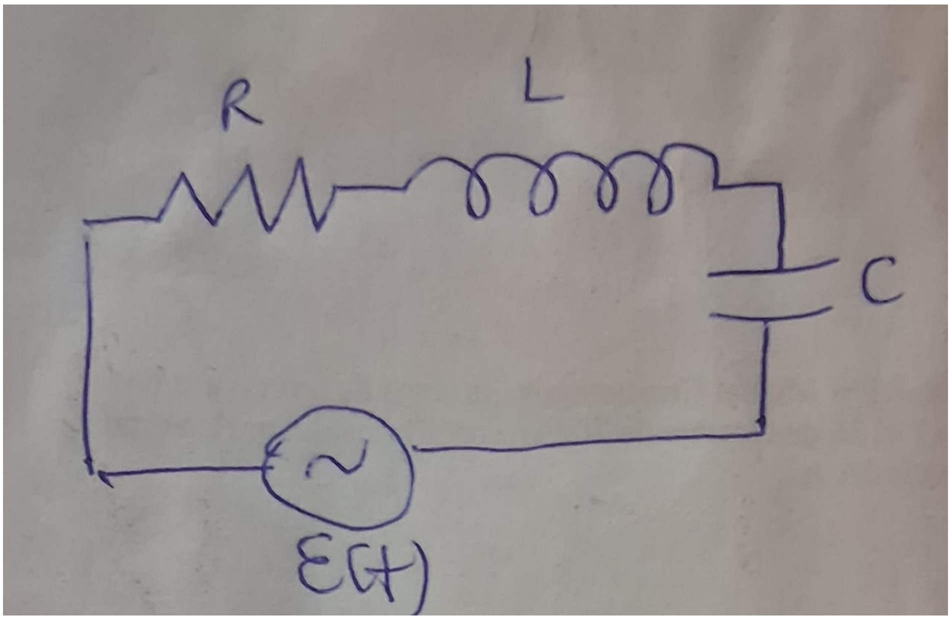

Figure 5: d