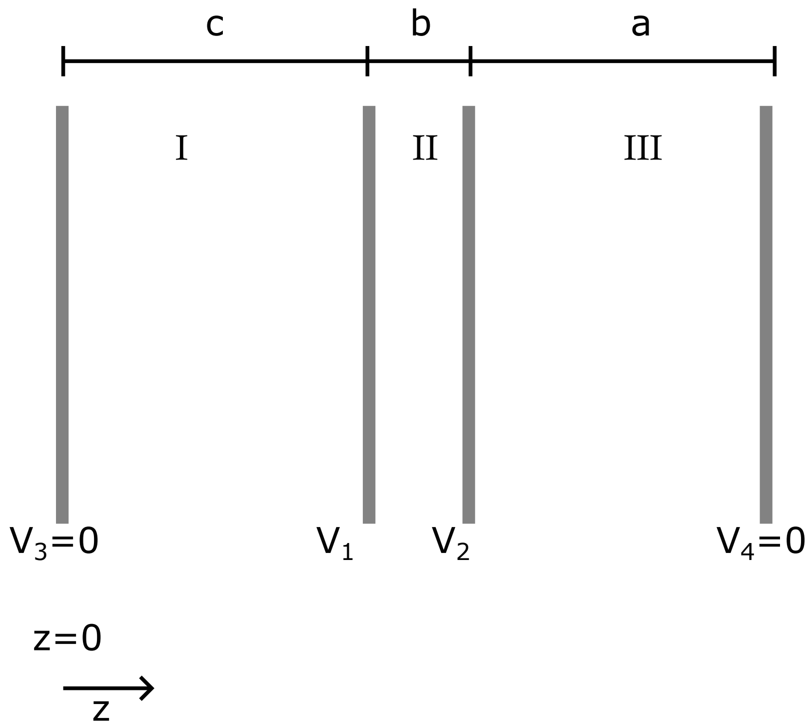

Figura 1:

En este problema nos piden los coeficientes de capacidad: $C_{11}, C_{21}, C_{12}, C_{22}$. Sabemos que estos coeficientes cumplen lo siguiente:

$$\begin{aligned} Q_1 &= V_1 C_{11} + V_2 C_{12} \\ Q_2 &= V_1 C_{21} + V_2 C_{22} \end{aligned} \tag{1}$$

V_1 y V_2 son datos, con lo cual, necesitamos conocer las cargas Q_1 y Q_2. Vamos a ver dos formas de resolver este problema.

Forma 1

Calculemos el potencial en todo el espacio, luego veremos por que es necesario hacer eso.

Como todos los conductores son planos (que podemos considerar infinitos), sabemos que cada uno generará un potencial lineal. En las regiones con $z < 0$ y $z > c + b + a$, tendremos que el potencial es cero, ya que no hay cargas y las condiciones de contorno son cero tambien.

En las otras 3 regiones entre los planos, tendremos que calcular las 6 constantes A, B, C, D, E y F:

$$V(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ V_{\mathrm{I}}(z) = Az + B & 0 \leq z \leq c \\ V_{\mathrm{II}}(z) = Cz + D & c \leq z \leq b + c \\ V_{\mathrm{III}}(z) = Ez + F & b + c \leq z \leq a + b + c \\ 0 & z \geq a + b + c \end{cases} \tag{2}$$

Las condiciones de contorno que tenemos son las siguientes:

1. $V_{\mathrm{I}}(0) = 0$
2. $V_{\mathrm{I}}(c) = V_1$
3. $V_{\mathrm{II}}(c) = V_1$

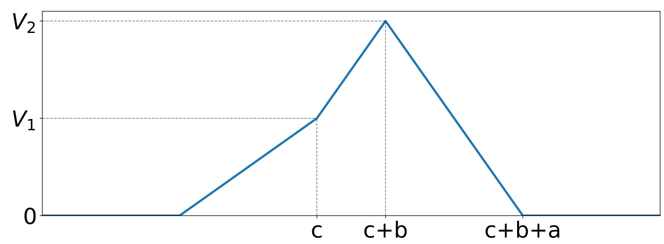

Figura 2: Sin hacer cuentas, este es el gráfico del potencial. Es lineal en todas las regiones y cumple con los valores de los potenciales a los que están puestos cada uno de los conductores.

4. $V_{\text{II}}(c+b) = V_2$
5. $V_{\text{III}}(c+b) = V_2$
6. $V_{\text{III}}(c+b+a) = 0$

Así que podemos despejar todo y queda:

$$V(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \dfrac{V_1}{c} z & 0 \leq z \leq c \\ \dfrac{V_2 - V_1}{b} z + V_1 - \dfrac{V_2 - V_1}{b} c & c \leq z \leq b+c \\ \dfrac{-V_2}{a} z + V_2 \left(1 + \dfrac{b+c}{a}\right) & b+c \leq z \leq a+b+c \\ 0 & z \geq a+b+c \end{cases} \tag{3}$$

Bien, conocemos entonces el potencial en todo el espacio. Para el campo, nos queda lo siguiente:

$$\vec{E}(z) = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ -\dfrac{V_1}{c}\hat{z} & 0 \leq z \leq c \\ -\dfrac{V_2 - V_1}{b}\hat{z} & c \leq z \leq b+c \\ \dfrac{V_2}{a}\hat{z} & b+c \leq z \leq a+b+c \\ 0 & z \geq a+b+c \end{cases} \tag{4}$$

Bueno, ahora entonces tenemos el campo en todo el espacio. Recordemos que lo que nosotros necesitamos son las cargas inducidas. ¿Por qué era necesario calcular los campos? Porque hay una relación entre el campo y las densidades superficiales de carga: siempre que hay una σ, el campo pega un salto de $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (ver figura 3):

Entonces σ_1 y σ_2 cumplen lo siguiente:

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \left(E_{\text{II}} - E_{\text{I}}\right) = \varepsilon_0 \left(-\frac{V_2 - V_1}{b} + \frac{V_1}{c}\right) = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right) V_1 - \frac{\varepsilon_0}{b} V_2$$

$$\sigma_2 = \varepsilon_0 \left(E_{\text{III}} - E_{\text{II}}\right) = \varepsilon_0 \left(\frac{V_2}{a} + \frac{V_2 - V_1}{b}\right) = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) V_2 - \frac{\varepsilon_0}{b} V_1$$

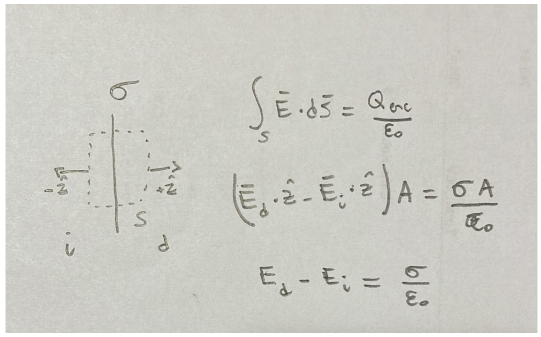

Figura 3: Las letras **i** y **d** refieren a izquierda y derecha.

Si cada conductor tiene área A, tenemos que $Q_1 = A\sigma_1$ y $Q_2 = A\sigma_2$. Por lo tanto tenemos escrita la ecuación 1, y comparando nos queda

$$C_{11} = A\varepsilon_0 \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)$$
$$C_{22} = A\varepsilon_0 \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)$$
$$C_{12} = C_{21} = -A\frac{\varepsilon_0}{b}$$

Forma 2

El problema también puede resolverse, de manera algo más astuta, haciendo uso del hecho de que los coeficientes de capacidad dependen de la geometría y no de los valores de los potenciales y las cargas. Entonces podemos ver qué pasa cuando $V_2 = 0$. Bueno, en ese caso las condiciones de contorno son más sencillas de satisfacer y resulta

$$\begin{cases} V_{\mathrm{I}}(z) = \dfrac{V_1}{c} z \Longrightarrow E_{\mathrm{I}}(z) = -\dfrac{V_1}{c} \\ \\ V_{\mathrm{II}}(z) = -\dfrac{V_1}{b} z + \dfrac{V_1}{b}(c+b) \Longrightarrow E_{\mathrm{II}}(z) = \dfrac{V_1}{b} z \\ \\ V_{\mathrm{III}}(z) = 0 \Longrightarrow E_{\mathrm{III}}(z) = 0 \end{cases}$$

De ahí sacamos los campos y podemos ver con el salto del campo en la superficie donde se encuentra σ_1 que

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \left(E_{\mathrm{II}} - E_{\mathrm{I}}\right) = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right) V_1$$

Y con el salto en la superficie que se encuentra σ_2 obtenemos:

$$\sigma_2 = \varepsilon_0 \left(E_{\mathrm{III}} - E_{\mathrm{II}}\right) = -\varepsilon_0 \frac{V_1}{b}$$

Con esto podemos calcular C_{11} y C_{12}. Nos faltaría C_{22}, pero para eso repetimos haciendo ahora $V_1 = 0$, y lo obtenemos.