Veamos el caso de una carga puntual q inmersa en un medio dielectrico lineal con suceptibilidad χ_e y permitivdad $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)$. Consideremos que el medio ocupa todo el espacio por simplicidad.

La única fuente para $\vec{D}$ son las cargas libres, en este caso la carga q. Por lo tanto

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$$

Dado que $\varepsilon > \varepsilon_0$, el efecto del dieléctrico es *apantallar* el campo de la carga q, es decir hacerlo más débil. ¿Cuánto valen las cargas de polarización? En principio, sólo puede haber una densidad en volumen ρ_p porque no hay una superficie donde pueda aparecer una σ_p. Sabemos que $\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P}$. Y el vector de polarización vale:

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E} = \varepsilon_0\chi_e\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$$

Si miramos la expresión de la divergencia en esféricas, tenemos

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F_r\right) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)F_\theta\right) + \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_\varphi\right)$$

Pareciera entonces que $\nabla\cdot\vec{P} = 0 \Rightarrow \rho_p = 0$. Pero si esto fuera cierto, ¿Quién estaría generando el campo que *apantalla* el campo de la carga q? Veamos, podemos pensar el problema de la siguiente forma. Llamemos $\vec{E}_0$ al campo en vacío (es decir sin dieléctrico). Sabemos que

$$\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Si llamamos $\vec{E}_p$ al campo que genera la polarización, podemos afirmar que $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$. Estamos diciendo que (como sabemos) el campo total $\vec{E}$ es la suma del campo en vacío más el campo que genere la polarización. Bueno tenemos entonces

$$\underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}}_{E} = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}_{E_0} + \vec{E}_p$$

y por lo tanto

$$\vec{E}_p = \frac{q}{4\pi r^2}(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0})\hat{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\hat{r} = \left(\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\vec{E}_0$$

Podemos definir $q_p = q\left(\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$ y entonces nos queda

$$\vec{E}_p = \frac{q_p}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$$

Bueno interpretemos un poco. Para empezar, como $\varepsilon > \varepsilon_0$, la carga de polarización es negativa. Por eso el campo se opone al sentido del campo de la carga q y lo reduce. Además, también es inmediato ver que $\left|\vec{E}_p\right| < \left|\vec{E}_0\right|$ dado que $\left|\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon}\right| < 1$. El campo de la polarización reduce el campo original pero no llega a anularlo.

Bien, ahora volvamos a ρ_p: no puede ser cero. Tiene que ser la densidad de una carga puntual con valor q_p. ¿Por qué no apareció en la divergencia? En realidad, porque la divergencia no está bien calculada en el origen. Podemos decir que es cero para cualquier punto en que $r > 0$. Pero justo en el origen no podemos afirmar eso. Lo mismo sucede con la densidad de una carga puntual, es cero en todo el espacio excepto en el punto en que está la carga. Hay una herramienta matemática que acude al rescate de este problema, que es la *delta de Dirac*. Con ella es posible escribir la densidad de una carga puntual como $\rho = q\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ en donde $\vec{r}'$ es la coordenada en que se encuentra la carga. Para los interesados en entender mejor esta herramienta, pueden leerlo en la sección 1.5 del libro de Griffiths. Tamibén pueden consultarlo si les interesa. De cualquier forma la van a usar y trabajar de manera recurrente en la siguiente materia de electromagnetismo.