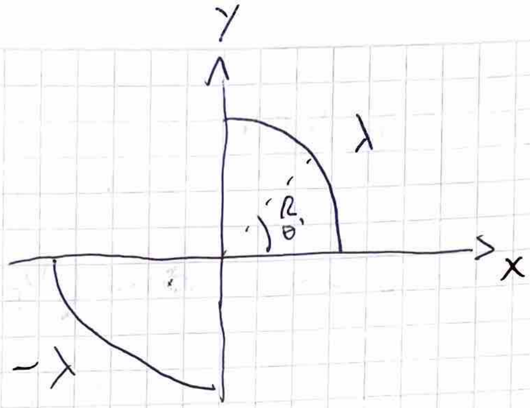
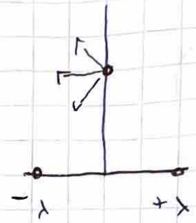
Problema 1:





a) $\bar{E}(z) \sim -(\hat{x}+\hat{y})$

$\bar{r} = z\hat{z}$ $\quad \bar{r}' = R\cos\theta'\hat{x} + R\,\mathrm{sen}\,\theta'\hat{y} = R\hat{r}'$

$$\bar{E} = k\int_0^{\pi/2} \lambda \frac{z\hat{z}-R\hat{r}'}{(z^2+R^2)^{3/2}} R\,d\theta' - k\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\lambda\frac{z\hat{z} - R\hat{r}'}{(z^2+R^2)^{3/2}}R\,d\theta' =$$

$$= \frac{k\lambda R^2}{(\ )^{3/2}}\left[-\int_0^{\pi/2}(\cos\theta'\hat{x} + \mathrm{sen}\,\theta'\hat{y})\,d\theta' + \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}(\cos\theta'\hat{x}+\mathrm{sen}\,\theta'\hat{y})\,d\theta'\right] =$$

↓ la parte en $\hat{z}$ se anula

$$= \frac{k\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\left[-(\hat{x}+\hat{y}) + (-\hat{x} - \hat{y})\right] = \frac{-2k\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}(\hat{x}+\hat{y})$$

b) Momento monop. $Q_{TOTAL} = 0$

Momento dipolar: $\bar{p} = \int \bar{r}'\rho(\bar{r}')\,d^3r' = \int_0^{\pi/2} R\hat{r}'\lambda R\,d\theta' - \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} R\hat{r}'\lambda R\,d\theta' =$

$$\Rightarrow \bar{p} = \lambda R^2(\hat{x}+\hat{y}) + \lambda R^2(\hat{x}+\hat{y}) = 2\lambda R^2(\hat{x}+\hat{y})$$

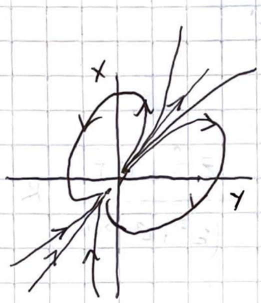
Ahora, por la exp. multipolos:

$$V(\bar{r}) = K \frac{\bar{r} \cdot \bar{p}}{r^3} + \text{Órdenes superiores} \left(1/r^3 \right)$$

$$\bar{r} \cdot \bar{p} = \left(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \right) 2\lambda R^2 (\hat{x} + \hat{y}) = 2\lambda R^2 (x+y)$$

$$\Rightarrow V(\bar{r}) = 2\lambda K R^2 \frac{x+y}{r^3}$$

c)



$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}}_{=0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2\lambda K R^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(x \overbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}}^{1/r^3} \right) = 2K\lambda R^2 \left((x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - \frac{3}{\cancel{2}} x (x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cancel{2}x \right)$$

$$= 2K\lambda R^2 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{x}{r^5} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{E}(\bar{r}) = -2K\lambda R^2 \left[\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5} \right)\hat{x} + \left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5} \right)\hat{y} \right] =$$

$$= -2K\lambda R^2 \left(\frac{\hat{x}+\hat{y}}{r^3} - \frac{3}{r^5}(x^2\hat{x} + y^2\hat{y}) \right)$$

$$E(x=0, y=0, z) = \frac{-2K\lambda R^2}{|z|^3} (\hat{x}+\hat{y})$$

Lo hallado en a) es $\bar{E}(z) = \dfrac{-2K\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} (\hat{x}+\hat{y})$

$\dfrac{1}{(z^2+R^2)^{3/2}} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \dfrac{1}{|z|^3}$ y me queda lo obtenido

mediante el desarrollo multipolar.

Problema 2:

Sólo hay un medio dieléctrico lineal. Por lo tanto allí se cumple $\bar{P} = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E}$. Además todo el problema tiene simetría esférica $\Rightarrow$ $\bar{E} = E(r)\hat{r}$ (lo mismo $\bar{D}$ y $\bar{P}$)

$\bar{\nabla}\times\bar{D} = \bar{\nabla}\times\bar{P} = \varepsilon_0\chi_e \bar{\nabla}\times\bar{E} = 0$
$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho_\ell$
} La fuente de $\bar{D}$ son las cargas libres.

cargas libres: q y las cargas que aparezcan en el conductor. Estas cargas solo pueden aparecer en la superficie interna en $r=a$ y la externa en $r=b$. Llamemoslas q_a y q_b.

Además, como el problema tiene simetría esférica, estas cargas se distribuyen de manera uniforme tal que

$\sigma_a = \dfrac{q_a}{4\pi a^2}$ y $\sigma_b = \dfrac{q_b}{4\pi b^2}$ son las densidades superficiales de carga en el conductor.

Ahora, para $r < a$, tenemos:

$$\oint \bar{D} \cdot d\bar{S} = 4\pi r^2 D(r) \quad y \quad Q_{enc}^{libre} = q$$

$$\Rightarrow \boxed{D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}}$$

Para $a < r < b$: $Q_{enc} = q + q_a \Rightarrow D(r) = \dfrac{q + q_a}{4\pi r^2}$

Con esto tenemos E: $E(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi \varepsilon r^2} & r < a \\ \dfrac{q + q_a}{4\pi \varepsilon_0 r^2} & a < r < b \end{cases}$

Por que $D = \varepsilon E$ en el dieléctrico. Además, entre a y b el campo tiene que ser cero por que es el interior del conductor

$$\Rightarrow q + q_a = 0 \Rightarrow \boxed{q_a = -q} \qquad \sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

Finalmente, $\bar{P}$ vale $P(r) = \begin{cases} \varepsilon_0 \chi E & r < a \\ 0 & a < r < b \end{cases}$

b) $\rho_p = -\bar{\nabla} \cdot \bar{P} = -\varepsilon_0 \chi \, \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = -\varepsilon_0 \chi \dfrac{q}{4\pi \varepsilon} \bar{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\hat{r}}{r^2} \right)$

Usando la fórmula para la divergencia en esféricos vemos que eso da cero para $r > 0 \Rightarrow \bar{\nabla} \cdot \bar{P} = 0$ y $\rho_p = 0$ (en $r > 0$)

Para σ_p, tenemos que ir al borde de $r=a$:

$$\boxed{\sigma_p = \bar{P}\cdot\hat{r}\Big|_{r=a} = \frac{\varepsilon_0 \chi q}{4\pi\varepsilon a^2}}$$

c) Sabemos que $V(b)=V_0$ y $V(\infty)=0$:

$$V_\infty - V(b) = 0 - V_0 = -V_0 = \int_b^\infty \bar{\nabla}V\cdot d\bar{r} = -\int_b^\infty \bar{E}\cdot d\bar{r}$$

Necesito el campo afuera (entre b e ∞): Por Gauss $\rightarrow$

$$\rightarrow \quad 4\pi r^2 D(r) = \frac{Q_{enc}}{\cancel{\varepsilon_0}} = \underbrace{q + q_a}_{=0} + q_b \Rightarrow D = \frac{q_b}{4\pi r^2} \Rightarrow E = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

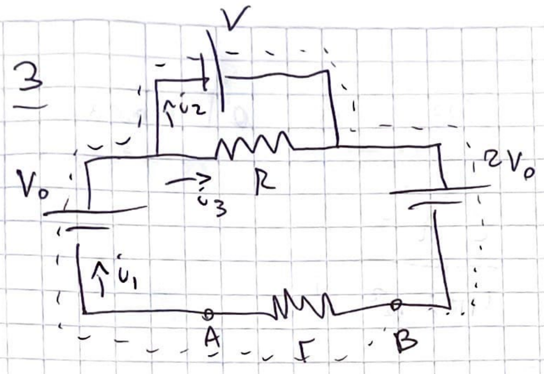
$$\Rightarrow -V_0 = -\int_b^\infty \frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{-q_b}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_b^\infty \frac{1}{r^2}\,dr}_{\frac{-1}{r}\Big|_b^\infty} = \frac{-q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$\Rightarrow \boxed{q_b = 4\pi\varepsilon_0 b V_0}$$

En términos de $\sigma_b = \frac{q_b}{4\pi b^2}$ me queda $\boxed{\sigma_b = \varepsilon_0 b V_0}$

Carga neta del conductor: $\boxed{q_a + q_b = -q + 4\pi\varepsilon_0 b V_0}$

Problema 3



a) .) Voy de B hasta B, pasando por la batería V:

$$2V_0 - V - V_0 + i_1 r = 0 \Rightarrow i_1 r = V - V_0 \Rightarrow \boxed{i_1 = \frac{V - V_0}{r}}$$

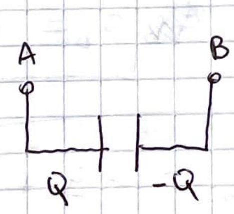
.) Recorro el circuito de arriba: $V + R i_3 = 0 \Rightarrow \boxed{i_3 = -\frac{V}{R}}$

Y por nodos: $i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow \boxed{i_2 = i_1 - i_3 = \frac{V - V_0}{r} + \frac{V}{R}}$

b) $V_B - i_1 r = V_A \Rightarrow V_B - V_A = i_1 r = V - V_0$

c) Para mantener descargado un cap entre A y B, la caída de tensión tendría que ser cero $\Rightarrow V = V_0$

d)



$V_B - V_A = V - V_0 = 5V - 10V = -5V$

Es decir $V_A - V_B = 5V > 0$

$\Rightarrow V_A > V_B$

$$Q = C \cdot (V_A - V_B) = 10\,\mu F \cdot 5\,V = 50\,\mu C$$

↳ Q es positiva en la chapa del lado con V_A y negativa del lado B!