P2

a) $\boxed{\bar{D} = D(r)\,\hat{e}_r}$ (1) pues: $\bar{D} \equiv \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$

y en el dieléctrico $\bar{P} = \chi \bar{E}$ ($\forall$ $\vec{0}$ Atem)

Como la única carga libre es esféricamente simétrica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ el $\bar{E}_{\rho_0}$ es en $\hat{e}_r$ y sólo depende de r $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\bar{P} \parallel \hat{e}_r$ y dependerá sólo de r $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\bar{D}$ también

b) Usando (1) y $\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho_L$ $\Rightarrow$ $\oiint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q_L(S)$

tomo S esferas de radio $r: (0, \infty)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\oiint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = 4\pi r^2 D(r)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 D(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 & r: (0, a) \\ \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 & r: (a, 2a) \\ \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 + Q_{L,b} & r: (2a, 3a) \\ \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 + Q_{L,b} + Q_{L,c} & r: (3a, 4a) \\ \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 + Q_{L,b} + Q_{L,c} + Q_{L,D} & r: (4a, 5a) \\ \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 + Q_{L,b} + Q_{L,c} + Q_{L,D} + Q_{L,E} & r: (5a, \infty) \end{cases}$$

(2)

Pero en conductores $\bar{D} \equiv 0$ (pues $\bar{E}_{conductor} \equiv 0$ y $\bar{P}_{conductor} \equiv 0$) $\Rightarrow$

$(2a, 3a)$: $\boxed{Q_{LB} = -\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0}$ (3)

$(4a, 5a)$: $\boxed{Q_{LC} + Q_{LD} = 0}$ (4)

luego, (2) queda ++ simple:

$$\boxed{\bar{D} = \frac{\hat{e}_r}{4\pi r^2} \begin{cases} Q_0 (r/a)^3 & (0, a) \\ Q_0 & (a, 2a) \\ 0 & (2a, 3a) \\ Q_{L,C} & (3a, 4a) \\ 0 & (4a, 5a) \\ Q_{L,E} & (5a, \infty) \end{cases}} \quad (5)$$

con $\boxed{Q_0 \equiv \frac{4}{3}\pi \rho_0 a^3}$

Debo hallar $Q_{L,C}$ y $Q_{L,E}$. Primero escribo $\bar{E}$:

$$\boxed{\vec{E} = \hat{e}_r \begin{cases} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{r}{a}\right)^3 & (\text{pues } \bar{P} \equiv 0 \times \text{sin carga libre}) \\ \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (\text{vacío} \Rightarrow \bar{P} \equiv 0) \\ 0 & (\text{conductor}) \\ \frac{Q_{L,C}}{4\pi\varepsilon r^2} & (\text{dieléctrico: } \bar{E} = \bar{D}/\varepsilon) \\ 0 & (\text{conductor}) \\ \frac{Q_{L,E}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (\text{vacío} \Rightarrow \bar{P} \equiv 0) \end{cases}} \quad (6)$$

PARA hallar $Q_{L,C}$ integro $\overline{E}$ entre c y d por una línea radial

$$\underbrace{V_d}_{=0} - \underbrace{V_c}_{=V_A} = -\int_c^d \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{3a}^{4a} \frac{Q_{L,C}}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$\Rightarrow -V_A = +\frac{Q_{L,C}}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{4a} - \frac{1}{3a}\right) = \frac{Q_{L,C}}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{3-4}{12a}\right)$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{Q_{L,C}}{48\pi\varepsilon a} \Rightarrow \boxed{Q_{L,C} = 48\pi\varepsilon a V_A} \quad 7$$

y por 3 y 4 se Q_{LB} y Q_{LD}

$\underline{Q_{L,E}}$: En $(5a,\infty)$ $\nabla^2\phi = 0$ y $\phi(5a) = \phi(\infty) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi = 0$ cumple con todo $\Rightarrow$ $\vec{E}$ es cero en $(5a,\infty)$

$$\Rightarrow \boxed{Q_{L,E} \equiv 0} \quad 8$$

$$\overline{P} = \chi\overline{E} = \frac{\chi Q_{L,C}}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{e}_r$$

C $\quad \rho_p = -\overline{\nabla}\cdot\overline{P} = -\nabla\cdot\left(\frac{\chi Q_{L,C}}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{e}_r\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\chi Q_{L,C}}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{r^2}\right)$

$$\rho_p = 0 \quad 9$$

$$\sigma_p(c) = \overline{P}(\underset{3a}{c})\cdot\underbrace{\hat{e}_m^{(ext)}(c)}_{-\hat{e}_r} = -\frac{\chi Q_{L,C}}{4\pi\varepsilon_0(3a)^2}$$

$$\sigma_p(d) = \overline{P}(\underset{4a}{d})\cdot\underbrace{\hat{e}_m^{(ext)}(d)}_{+\hat{e}_r} = +\frac{\chi Q_{L,C}}{4\pi\varepsilon_0(4a)^2}$$

$\rightarrow Q_p(c) + Q_p(d) = 0$ ✓