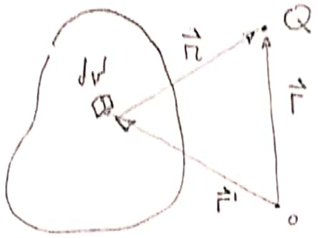
Repaso Clase 1.

- Carga eléctrica: dos tipos (negativa y positiva)
  cuantizada
  se conserva global- y localmente.

- $\vec{F} = Q\,\vec{E}(\vec{r})$; $\vec{E}$: campo eléctrico.



$\vec{\imath} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$

- $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{todo}} \frac{\rho(\vec{r}')}{\imath^2}\,\hat{\imath}\,dv'$

- $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qQ}{\imath^2}\,\hat{\imath}$ ley de Coulomb

- $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ principio de superposición

Scanned with CamScanner

Vamos a reformular la electrostática como ecuaciones diferenciales para el campo $\vec{E}$; También como ecs. integrales (pragmáticas).

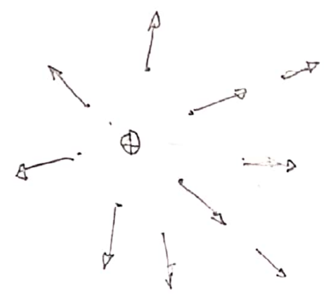
Antes de calcular $\nabla \cdot \vec{E}$ y $\nabla \times \vec{E}$: sumamos intuición mediante:

Representaciones gráficas del campo eléctrico

el campo eléctrico es un vector que toma valores en todo el espacio

$\vec{E}(\vec{r})$ es un campo vectorial.

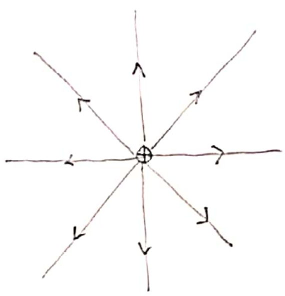
Una forma de representarlo es elegir algunos puntos $\vec{r}_i$ en las cercanías de la distribución de cargas y dibujar los vectores $\vec{E}_i = \vec{E}(\vec{r}_i)$ en esos puntos. Por ejemplo, para una carga puntual: $q > 0$: en el origen



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- a distancias iguales de q, el modulo de $\vec{E}$ es el mismo
- $\vec{E}$ es siempre radial: $\vec{E} \parallel \hat{r}$

Si unimos los vectores de manera continua, Tenemos líneas de campo.

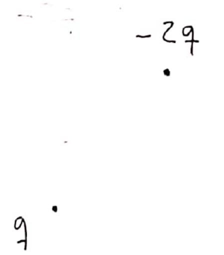


- la densidad de líneas ahora indica la intensidad (el módulo) del campo (que tan juntas están)

OJO: el diagrama es 2D y la "densidad" en realidad está en 3D.

- Para que el diagrama de líneas de campo sea semi-cuantitativo, debemos:
  - ser consistentes en el número de lineas, proporcional al valor de las cargas: si q tiene 6 líneas $3q \to 18$.
  - muy cerca de una carga puntual el campo será radial en Todas direcciones.
  - la lineas nacen en cargas positivas (fuentes) y terminan en cargas negativas (sumideros)
  - las lineas no se cruzan ¡o $\vec{E}$ tendría dos valores diferentes en ese punto!

<u>ejercicio</u>:



Scanned with CamScanner

Ley de Gauss

Les dije que nos interesaba calcular $\nabla\cdot\vec{E}$ para una distribución de carga. Y en un momento lo vamos a hacer, pero antes daremos un rodeo por un camino menos directo pero esclarecedor y, creo yo, más intuitivo.

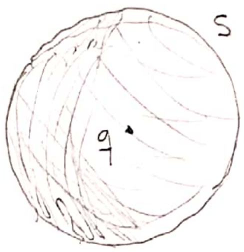
La idea es que gracias al Teorema de la divergencia:

$$\int_V (\nabla\cdot\vec{E})\, dV = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s},$$

con lo que la divergencia está relacionada con el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie cerrada: $\phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}$

- Nos preguntamos entonces, dada una distribución de cargas, cual es el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie cerrada?

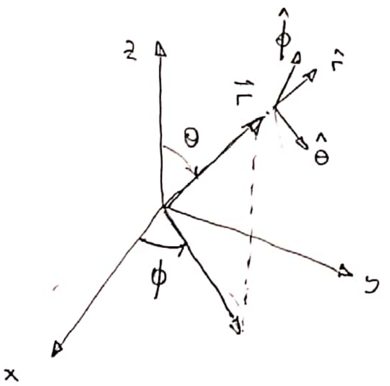
- Empecemos con algo más simple: una carga puntual en el origen y una superficie esférica centrada en el origen que la encierra.



$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\,\hat{r}}$$

$$\phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = ?$$

para resolver esta integral resulta conveniente escribirla en coordenadas esféricas:



un elemento de superficie diferencial:

$$d\vec{s} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{r}$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\cancel{r^2}}\,\overbrace{\hat{r}\cdot(\cancel{r^2}\sin\theta\, d\theta\, d\phi)\,\hat{r}}^{\hat{r}\cdot\hat{r}\,=\,1}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta}_{=\cancel{\pi}=2} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Big\}$$ "la carga encerrada"

∴ otra forma de resolver el mismo problema, usando las simetrías de la distribución de carga (una carga puntual) y la superficie S (esférica)

$d\vec{s} = ds\,\hat{r}$, $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$ $\Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_S E(r)\, ds\, \underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}} = E(r)\cdot\oint_S ds$

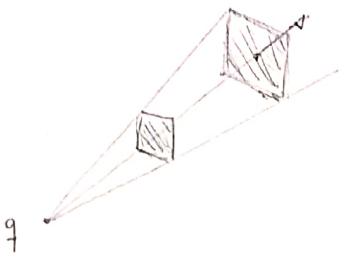
$$= E(r)\cdot 4\pi r = q/\varepsilon_0 \Big\}$$

Scanned with CamScanner

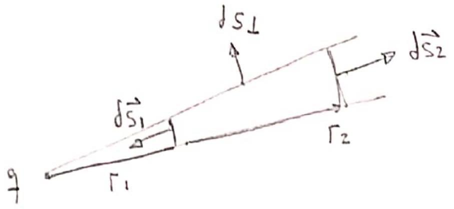
Ahora imaginen una carga puntual y su campo: (Feynman / Purcell)

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$

- consideremos una superficie cerrada construida del siguiente modo:



pequeño
- Tomamos cuatro lineas radiales (en $\hat{r}$) y las unimos para formar las cuatro caras de un "cono" de Tapas cuadradas s_1 y s_2
- La superficie S queda entonces conformada por Tres partes, los laterales radiales y las Tapas, una a distancia r_1 y otra a distancia r_2.



- como los vectores $d\vec{s}$ de una superficie cerrada apuntan por convención siempre hacia afuera, $d\vec{s}_1 = ds_1 (-\hat{r})$ y $d\vec{s}_2 = ds_2\, \hat{r}$.

El flujo de $\vec{E}$ va a tener Tres contribuciones:

$\phi_s = \phi_\perp + d\phi_{s_1} + d\phi_{s_2}$

la primera se anula: $\phi_\perp = 0$ porque $ds_\perp \perp \hat{r}$ (la dirección del campo)
dicho de otra manera: el campo $\vec{E} \parallel \hat{r}$ es Tangente a los laterales y no los atraviesa $\Rightarrow$ no contribuye al flujo.

$\vec{E}(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r_1^2} \hat{r}$; $d\vec{s}_1 = r_1^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, (-\hat{r})$

$\vec{E}(r_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r_2^2} \hat{r}$; $d\vec{s}_2 = r_2^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$

$\Rightarrow d\phi_{s_1} = \vec{E}(r_1) \cdot d\vec{s}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\cancel{r_1^2}} \hat{r} \cdot \cancel{r_1^2} \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, (-) \hat{r}$ $\quad (\hat{r}\cdot\hat{r} = 1)$

$= (-) \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = (-) \, d\phi_{s_2}$

$\boxed{\therefore \ \phi_s \equiv 0}$ es decir el flujo Total que atraviesa S es nulo
Todas las lineas de campo que entran por S_1 salen por S_2.

- que pasa si ahora consideramos que las ~~caras~~ Tapas están inclinadas? por ejemplo $d\vec{s}_2$ no está en la dirección radial $\hat{r}$

Scanned with CamScanner

. la cara S_2 se inclina un angulo α

$S_2 \to S_2'$

$a \cos\alpha = b$

$ac \cos\alpha = b.c$ (c es la longitud del otro lado de la cara, tanto de S_2 como S_2')

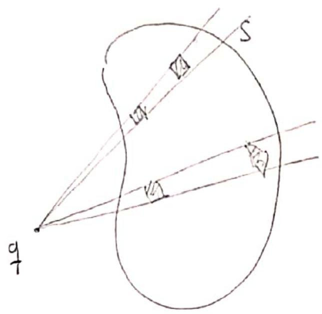
$|d\vec{S}_2'| \cos\alpha = |d\vec{S}_2|$

$$\Rightarrow d\phi_2' = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2' = E(r_2)\hat{r} \cdot d\vec{S}_2' = E(r_2)\ |d\vec{S}_2'| \cos\alpha = E(r_2)\ |d\vec{S}_2| = d\phi_2$$

$\therefore \boxed{d\phi_2' = d\phi_2}$ el flujo de $\vec{E}$ es el mismo a través de S_2 que de S_2'

- por lo tanto : $\phi_S = 0$ a través de una superficie de lados radiantes y tapas inclinadas arbitrariamente.

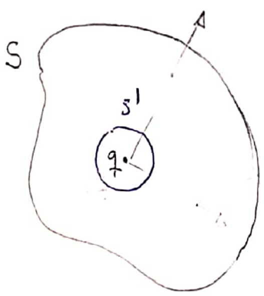
Ahora, si pensamos en una superficie cerrada arbitraria S, y una carga puntual q fuera de S, entonces



podemos descomponerla en poliedros como el anterior de caras radiales, y el flujo va a ser la suma :

$\boxed{\phi_S = 0}$ si la carga q está fuera de S.

- ¿Que sucede si la carga q está dentro de la superficie cerrada S ?



recurrimos a un truco : Imaginamos una superficie S'' que tiene dos regiones : S, y una esferita S de radio pequeño centrada en q : $S'' = S \cup S'$

$$\Rightarrow \phi_{S''} = \phi_S + \phi_{S'} = 0 \quad \text{porque } q \text{ está fuera de } S''$$

$$\Rightarrow \phi_S = -\phi_{S'} = -\left(-q/\varepsilon_0\right) = q/\varepsilon_0$$

porque $d\vec{S}' \sim (-)\hat{r}$!

Resumiendo, para una carga puntual q el flujo de $\vec{E}$ a través de suna superficie cerrada es

$$\phi_S = \begin{cases} 0 & \text{si } q \text{ está fuera de } S \\ q/\varepsilon_0 & \text{si } S \text{ contiene a } q \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

- ¿ Que pasa si en vez de una carga puntual tenemos un conjunto de cargas? ¿ o una distribución? En el caso discreto:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

14.1 $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_S \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{N} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{N} q_i/\varepsilon_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

donde suponemos que todas las cargas q_i están dentro de S, sino su contribución al flujo es nula.

$\Rightarrow Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$ es la carga encerrada en S.

La ley de Gauss es entonces:

14.2 $$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

donde Q_{enc} es la carga encerrada en una superficie arbitraria cerrada S.

Obs: el resultado depende crucialmente de la dependencia $1/r^2$ de $\vec{E}$.

Ahora, volviendo al teorema de la divergencia,

14.3 $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla\cdot\vec{E})\, dv$$

y la carga encerrada en S puede escribirse como

14.4 $$Q_{enc} = \int_V \rho\, dv$$

Entonces $$\int_V (\nabla\cdot\vec{E})\, dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dv$$

y como esto vale para una superficie arbitraria $\Rightarrow$ V arbitrario

resulta que

14.5 $$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

esta es la forma diferencial de la Ley de Gauss, y una de las ecuaciones de Maxwell

dimos un gran rodeo para llegar a (14.5), con suerte ganamos algo de intuición sobre la física que describe, pero... no era más fácil calcular directamente la divergencia de $\vec{E}$?

Scanned with CamScanner