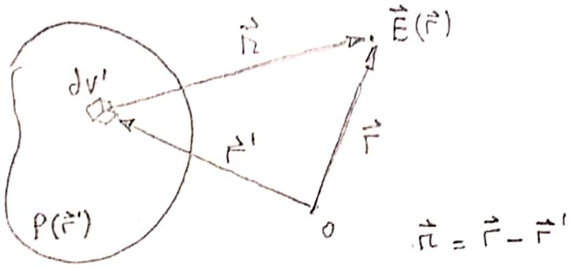
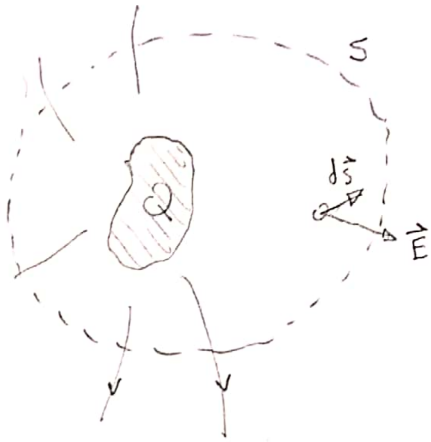
Resumen clase 2.



$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{\pi^2}\,\hat{\pi}\,dv'}$$

ley de Coulomb para $\vec{E}$.



Ley de Gauss (integral)

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

Ley de Gauss (diferencial)

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

divergencia de $\vec{E}$

La ley de Coulomb para una distribución de carga $\rho(\vec{r})$

(15.1) $$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{Todo}} \rho(\vec{r}\,')\,\frac{\hat{\eta}}{\eta^2}\,dv'$$

- la integral es sobre Todo el espacio; podemos extenderla así porque $\rho = 0$ donde no hay carga
- recordamos que $\vec{\eta} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

"Solo" necesitamos calcular la divergencia de ésta expresión...

(15.2) $$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \nabla\cdot\left(\frac{\hat{\eta}}{\eta^2}\right)\rho(\vec{r}\,')\,dv'$$

acá fíjense que como la divergencia es una derivada con respecto a $\vec{r}$ no afecta a ρ que depende de $\vec{r}\,'$. Solo resta calcular

(15.3) $$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\eta}}{\eta^2}\right) = \,?$$

Uno podría esperar que esta función debería tener una divergencia muy grande...

Dada la simetría esférica del campo vectorial : $\vec{f}(\vec{r}) = \frac{\hat{r}}{r^2}$

es conveniente escribir el operador vectorial $\nabla = \text{div}$ en esféricas

(15.4) $$\nabla\cdot\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(V_\phi)$$

donde V_r, V_θ, V_ϕ son las componentes de $\vec{V}$ en esféricas, esto es:

$$\vec{V} = V_r\,\hat{r} + V_\theta\,\hat{\theta} + V_\phi\,\hat{\phi}$$

en el caso que estamos considerando $\vec{f} = f_r\,\hat{r}$ con $f_r = 1/r^2$ y las otras dos componentes son nulas, $f_\theta = f_\phi = 0$.

(15.5) $$\therefore\ \nabla\cdot\vec{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0\,.$$

$\boxed{\text{cero!}}$ este resultado parece raro para una función $\vec{f}(\vec{r})$ que "diverge" para todos lados.

Ahora fíjense que si aplicamos el teorema de la divergencia, en una esfera de radio R y volumen $V(R)$ superficie $S(R)$ centrada en el origen,

$$\int_V (\nabla\cdot\vec{f})\,dv = \oint_S \vec{f}\cdot d\vec{s} = \oint_S \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot d\vec{s} = \oint_S \frac{\hat{r}}{R^2}\cdot R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi .$$

Esto es inusitado porque si $\nabla\cdot\vec{f}$ se anula en todo el espacio entonces esta integral debería valer cero. ¿Qué está pasando?

El problema está en $r=0$, donde $\vec{f}$ diverge. Nuestro error oculto está en el cálculo de $\nabla\cdot\vec{f}$ en esféricas, que tiene una indeterminación en $r=0$.

Estamos ante un objeto que vale cero en todo el espacio, y sin embargo la integral en una esfera de radio arbitrario R da $4\pi \neq 0$.

Está claro que toda la contribución a la integral viene de un solo punto en $\vec{r}=0$.

Este objeto no es una función (indefinida en $r=0$) sino una distribución o función generalizada, y en Física la conocemos como

Delta de Dirac: $\delta(\vec{r})$

Vamos a hacer un breve interludio matemático.

Delta de Dirac en 1D.

Informalmente podemos definir la delta de Dirac $\delta(x)$ como un pico infinitesimalmente angosto e infinitamente alto:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \forall\, x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad \text{(esto no es estrictamente necesario...)}$$

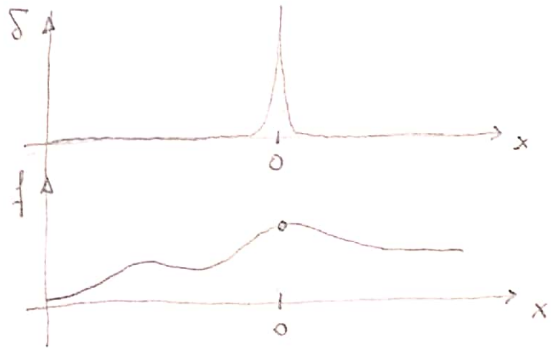
y $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

Entonces si $f(x)$ es una función, $f(x)\,\delta(x) = f(0)\,\delta(x) \quad \forall x$ ya que $\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$.

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = f(0)\cdot 1 = f(0).$$

esta última suele ser la definición más formal de la distribución



NOTA: Una manera de introducir distribuciones como la $\delta(x)$ a partir de la Teoría de funciones es como límite de una secuencia de funciones.

$$\delta(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin kx}{\pi x} \quad ó \quad \delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2+\varepsilon^2}$$

Acá nos va a bastar con su definición.

- La delta de Dirac puede estar desplazada del origen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a) \qquad \forall f(x) \quad \text{(definición)}$$

esto define a una "delta en a":

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\neq a \\ \infty & \text{en } x=a \end{cases} \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,dx = 1$$

con lo que $f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a) \quad \forall x.$

Delta de Dirac en 3D

$$\delta^3(\vec r) \equiv \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

$$\int_{\text{Todo}} \delta^3(\vec r)\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x) \int_{\infty}^{\infty} dy\,\delta(y) \int_{\infty}^{\infty} dz\,\delta(z) = 1$$

Para una función cualquiera $f(\vec r)$

$$\int_{\text{Todo}} f(\vec r)\,\delta^3(\vec r-\vec a)\,dv = f(\vec a)$$

Ahora podemos volver a la ec. (15-3). La divergencia de esta función no es mas que la delta de Dirac con un peso 4π:

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat r}{r^2}\right) = 4\pi\,\delta^3(\vec r) \quad \text{o mas generalmente} \quad \nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right) = 4\pi\,\delta^3(\vec{\mathscr{r}})$$

(regla de la cadena)

Luego de este desvío matemático volvemos al cálculo de la divergencia de $\vec{E}$, ec. (15.2):

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)\rho(\vec{r}\,')\,dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int 4\pi\,\delta^3(\vec{\mathscr{r}})\cdot\rho(\vec{r}\,')\,dv'$$

$$= \frac{1}{\cancel{4\pi}\,\varepsilon_0}\cancel{4\pi}\int \delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,')\,dv' = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho(\vec{r})$$

(18.1) $\therefore$ $\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})}$ Ley de Gauss en forma diferencial.

De esta expresión podemos derivar la forma integral de la Ley de Gauss usando el Teorema de la divergencia:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla\cdot\vec{E})\,dv = \int_V \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})\,dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,.dv = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

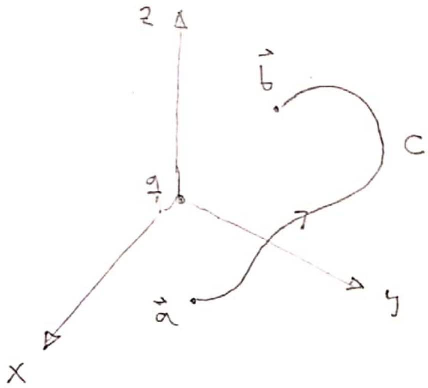
(18.2) $\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$ Ley de Gauss en forma integral.

comentario final: la forma (18.1) puede parecer mas compacta y elegante. Es la manera en que habitualmente escribimos las ecs. de Maxwell. Pero vamos a ver que la ec. (18.2) es muy valiosa y muy práctica a la hora de calcular campos para distribuciones de carga con cierta simetría.

Rotor del campo $\vec{E}$

Dijimos que para que el campo estuviera determinado, además de $\nabla \cdot \vec{E}$ (¡y condiciones de contorno!) necesitamos conocer $\nabla \times \vec{E}$:

Vamos a emplear una estrategia similar a la que usamos con $\nabla \cdot \vec{E}$.
Consideremos primero una carga puntual en el origen



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Stokes

Motivados por el Teorema de Stokes, que vincula el rotor con la integral de línea del campo. Vamos de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ por una curva C.
En coordenadas esféricas,

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r \sin\theta\, d\phi\,\hat{\phi}$$

$$\therefore \quad \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \left(-\frac{1}{r} \Big|_a^b \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right)$$

donde r_a y r_b son las distancias de q (en el origen) a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Si consideramos una curva C cerrada, entonces $\vec{a} = \vec{b}$ y $r_a = r_b$, con lo que

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad \text{para cualquier curva C cerrada}$$

ahora sí, por el Teorema de Stokes

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \forall C$$

por lo tanto

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = \vec{0}}$$

NOTA: el resultado es independiente del origen de coordenadas; $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ son vectores que pueden escribirse en cualquier sistema; acá elegimos uno conveniente

Si bien calculamos el rotor en el campo de una carga puntual Tenemos por el principio de superposición que para muchas cargas q_i $i=1...N$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \Rightarrow \nabla\times\vec{E} = \nabla\times\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i = \sum_{i=1}^{N}\nabla\times\vec{E}_i = \vec{0}$$

$\boxed{\nabla\times\vec{E} = 0}$ para una distribución de cargas arbitraria.

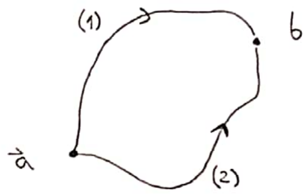
∴ siempre que las cargas sean estáticas, es decir no se muevan

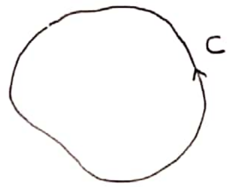
Nota -

Potencial Eléctrico

$\nabla\times\vec{E} = 0$ Impone condiciones sobre el campo $\vec{E}$.

- es decir, el campo eléctrico no puede ser cualquier cosa, hay ciertos campos vectoriales que nunca podrían ser campos eléctricos (estáticos).





- como $\nabla\times\vec{E} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall C$

es decir, la integral de línea de $\vec{E}$ a lo largo de cualquier curva cerrada C es cero.

- como consecuencia, la integral de línea entre dos puntos $\underline{a}$ y $\underline{b}$ no depende del camino tomado:

$$\int_{(1)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{(2)} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

si no fuera así, podríamos ir de $\underline{a}$ a $\underline{b}$ por el camino (1) y volver por el camino (2) cerrando la curva con una integral no nula!

- como la integral de línea entre dos puntos cualesquiera no depende del camino que tomemos, es posible definir una función escalar $V(\vec{r})$

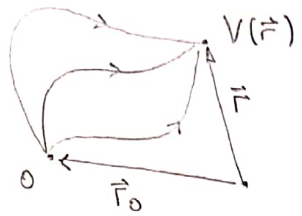
(21.1) $$\boxed{V(\vec{r}) \equiv -\int_{O}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}$$

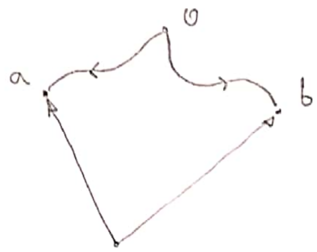
se llama potencial eléctrico

es un campo escalar

- en esta expresión, O es un punto de referencia fijo, pero en principio arbitrario.

Habiendo fijado O, $V(\vec{r})$ está bien definida y depende solo de $\vec{r}$, ya que es indiferente qué camino tomemos para calcular la integral.





La diferencia de potencial entre dos puntos a y b

(21.2) $$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = -\int_{O}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} - \left(-\int_{O}^{a} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}\right) = -\int_{O}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} - \int_{a}^{O} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$\therefore\ V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = -\int_{a}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad (21.3)$$

Ahora recordamos el Teorema fundamental del cálculo para gradientes

Dada una función escalar $V(\vec{r})$

(21.4) $$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = \int_{a}^{b} (\nabla V)\cdot d\vec{\ell}$$

de modo que $$\int_{a}^{b} (\nabla V)\cdot d\vec{\ell} = -\int_{a}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

para cualquier par de puntos $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Entonces:

(21.5) $$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

esta ecuación es la forma diferencial de la expresión (21.1) y nos dice que el campo $\vec{E}$ es el gradiente de un potencial escalar $V(\vec{r})$ como consecuencia de $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$.

Potencial eléctrico

$$V(\vec{r}) = -\int_0^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

- NOTA: no confundir potencial con energía potencial; el potencial no tiene unidades de energía, sino energía por unidad de carga.
- UNIDADES: $[V] = [E][x] = \frac{[F]}{[Q]}[x] = \frac{N}{C}\cdot m = \text{Volt}$ $\left.\right\}$ $1V = \frac{1J}{C}$ $\left.\right\}$
- es un escalar: lo dijimos y lo repetimos, $V(\vec{r})$ es un campo escalar. por este motivo es más simple de calcular que $\vec{E}(\vec{r})$, que es un vector con tres componentes.
- si conocemos $V(\vec{r})$, podemos obtener $\vec{E}$ tomando el gradiente.
- SIGNO: el signo (−) en la definición es una convención.
- la expresión $\vec{E} = -\nabla V$ esconde detrás la propiedad $\nabla\times\vec{E} = \vec{0}$.

que implica tres relaciones entre las derivadas de las componentes de $\vec{E}$:

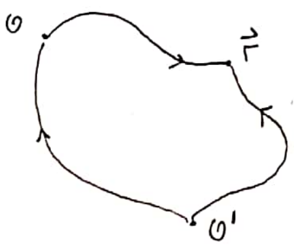
si $\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r})\,\hat{x} + E_y(\vec{r})\,\hat{y} + E_z(\vec{r})\,\hat{z}$

$$\nabla\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\therefore\ \nabla\times\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \left.\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z},\quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x};\quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}\right\}$$

- El punto de referencia es arbitrario pero suele tomarse en el infinito.

(no confundirlo con el origen del sistema de coordenadas, aunque en algún caso puedan coincidir...)



$$V(\vec{r}) = -\int_O^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

la integral es independiente del camino

$$V'(\vec{r}) = -\int_{O'}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \underbrace{-\int_{O'}^{O} \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\equiv\, \mathbb{C}\ \text{(una constante)}} - \int_O^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \mathbb{C} + V(\vec{r})$$

V y V' difieren en una constante

$$\Rightarrow V'(\vec{b}) - V'(\vec{a}) = V(\vec{b}) - V(\vec{a}) \quad \text{y} \quad \underline{\nabla V' = \nabla V}$$

- el "valor" del potencial no tiene significado físico
- son las diferencias de potencial que nos dicen cómo es el campo eléctrico en algún lugar del espacio ($\vec{E} = -\nabla V$)
- si bien el punto $\mathcal{O}$ suele tomarse en el infinito, esto no puede hacerse para distribuciones infinitas de carga, como verán en algunos problemas de la práctica.

• El potencial satisface el principio de superposición:

si tenemos varias distribuciones de carga

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_N$$

• Potencial electrostático para una distribución de carga localizada

Está bien eso de obtener el campo eléctrico a partir del potencial $\vec{E} = -\nabla V$, pero cómo calculo $V(\vec{r})$ si tengo una distribución de cargas?

Empezamos por una carga puntual en el origen:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$, elemento de línea en coord. esféricas

$$V(\vec{r}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^2}\,dr'\,\hat{r}\cdot\hat{r}$$ pues $\hat{r}\cdot\hat{\theta} = \hat{r}\cdot\hat{\phi} = 0$.

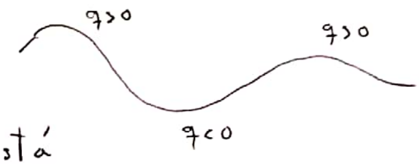
$$V(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\left[\frac{-1}{r'}\right]_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

{ al elegir el ∞ como punto de referencia, se anula esa cte. en la expresión para $V(r)$.

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

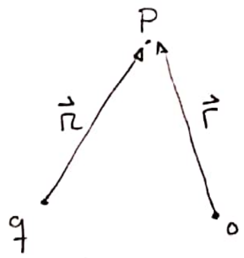
NOTA: $V(r) > 0$ si $q > 0$
$V(r) < 0$ si $q < 0$

la lógica de la convención del signo $(-)$ en la definición de potencial: para que:

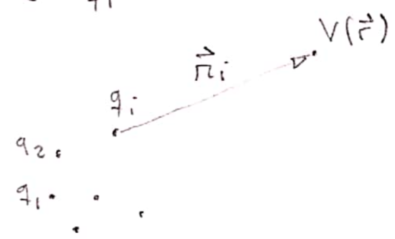
V(r) 

En general, si q no está en el origen:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}} \qquad \left(\text{con } \vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}\,'\right).$$



Si tenemos una distribución de cargas puntuales q_i por el principio de superposición:



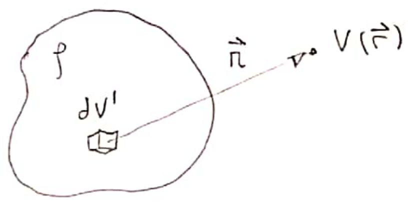
$$(24.1) \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

y si la distribución de cargas es continua:

$$(24.2) \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

por ejemplo para una densidad de carga volumétrica $\rho(\vec{r}\,')$

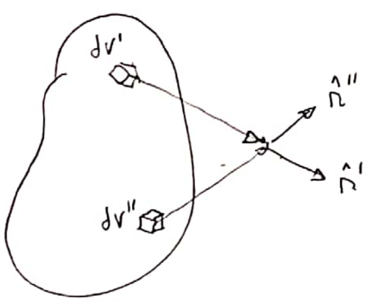
$$(24.3) \quad \boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{r}\, dv'}$$



recuerden la expresión análoga para el campo $\vec{E}$:

$$(24.4) \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}\,') \frac{\hat{r}}{r^2}\, dv'$$

- lo molesto en esta integral es el versor $\hat{r}$, que apunta en distintas direcciones cuando recorremos el volumen ocupado por $\rho(\vec{r}\,')$



- con el potencial no tenemos este problema ya que en la integral (24.3) estamos sumando escalares.

Para distribuciones de carga superficiales y lineales tenemos expresiones análogas

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{r}\, ds'$$

$$V(\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{r}\, dl'$$

Ecuaciones de Poisson y Laplace para $V(\vec{r})$

La expresión del campo $\vec{E}$ en función del potencial

(25.1) $$\vec{E} = -\nabla V(\vec{r})$$

puede combinarse con las ecuaciones diferenciales

(25.2) $$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

(25.3) $$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

ec. de Poisson (25.4)

y si en una región del espacio No hay cargas, $\rho \equiv 0$

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

ec. de Laplace (25.5)

estas ecs., sobre todo (25.5) es una formulación muy útil de la electrostática ya que hay muchas técnicas para resolverlas.

Por otro lado, el rotor de $\vec{E}$ nos dice

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (-\nabla V) = -\nabla \times (\nabla V) \equiv 0$$

{ el rotor de un gradiente siempre se anula

esta ultima no es tan informativa...
simplemente es la consecuencia de que $\vec{E} = -\nabla V$, y si lo recuerdan esta ecuación la obtuvimos apartir de $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$.
(es autoconsistente) _

Resumen electrostática

- los tres objetos claves de la teoría:
  - ρ : distribución de cargas
  - $\vec{E}$: campo eléctrico
  - V : potencial electrostático
- las conexiones entre ellos: