Resumen electrostática

- Los tres objetos claves de la teoría:
  - ρ : distribución de cargas
  - $\vec{E}$: campo eléctrico
  - V : potencial electrostático

- Las conexiones entre ellos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
& \rho(\vec{r}) \arrow[dl, shift right, "V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\, d\tau'"'] \arrow[dr, shift left, "\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}^2}\,\hat{\mathscr{r}}\, d\tau'"] & \\
V(\vec{r}) \arrow[ur, shift right, "\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0"'] \arrow[rr, shift left, "\vec{E} = -\nabla V"] & & \vec{E}(\vec{r}) \arrow[ul, shift left, "\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad \nabla \times \vec{E} = 0"] \arrow[ll, shift left, "V(\vec{r}) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}"]
\end{tikzcd}$$

Expansión multipolar

para una distribución de cargas localizada en el espacio

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\pi}\, dv'$$

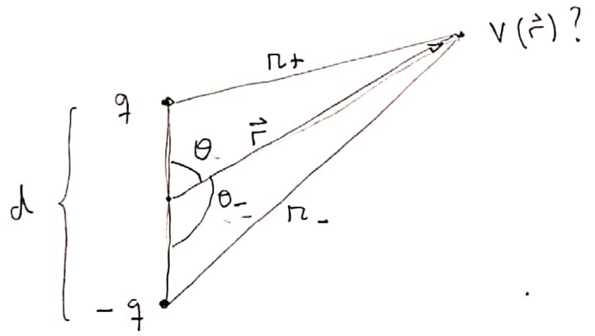
para una carga puntual en el origen

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \qquad \sim \frac{1}{r} \text{ cuando } r \to \infty$$

¿Que podemos decir del potencial cuando nos alejamos de una distribución de cargas $\rho(\vec{r}\,')$?

Empezamos por considerar un problema simple que podríamos pensar como el siguiente paso a una carga puntual: dos cargas

El dipolo eléctrico está formado por dos cargas puntuales q y $-q$ separadas por una distancia $\underline{d}$.

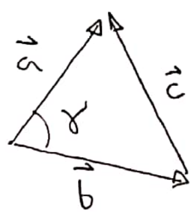


. por el principio de superposición, $V(\vec{r}) = V_+(\vec{r}) + V_-(\vec{r})$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{\pi_+} - \frac{q}{\pi_-} \right)$$

. Esta expresión esta escrita en función de dos variables π_+ y π_-, nos gustaría encontrar una forma dep. de r

. breve pausa para recordar:



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\, \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma \qquad \text{(teor. del coseno)}$$

$$r_+^2 = r^2 + (d/2)^2 - \cancel{2}\, r \frac{d}{\cancel{2}} \cdot \cos\theta$$

$$r_-^2 = r^2 + (d/2)^2 - \cancel{2}\, r \frac{d}{\cancel{2}} \cos\theta_- \quad ; \quad \cos\theta_- = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$r_\pm^2 = r^2 + (d/2)^2 \mp r\, d \cos\theta$$

- como nos interesa saber que sucede lejos de las cargas, es conveniente re-escribir esta expresión en términos del número d/r:

$$r_\pm^2 = r^2 \left[1 \mp \left(\frac{d}{r}\right) \cos\theta + \frac{1}{4}\left(\frac{d}{r}\right)^2 \right]$$

- lejos de la distribución de carga, el factor $\varepsilon = d/r \ll 1$ y podemos despreciar el término $\sim \varepsilon^2$;

$$\therefore \quad \frac{1}{r_\pm} \simeq \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}$$

y como $\varepsilon = d/r$ es muy pequeño podemos expandir en serie de Taylor: $\quad (1 + a\,\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} a\, \varepsilon + O(\varepsilon^2)$

$$\frac{1}{r_\pm} \simeq \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{1}{2}\frac{d}{r}\cos\theta\right)$$

Volviendo a la expresión del potencial para el dipolo, podemos ahora aproximarla

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\frac{d}{r}\cos\theta - \cancel{1} + \frac{1}{2}\frac{d}{r}\cos\theta\right)$$

$$\boxed{V(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\, d \cos\theta}{r^2}} \quad \text{para } \frac{d}{r} \ll 1 \quad ; \quad r \gg d.$$

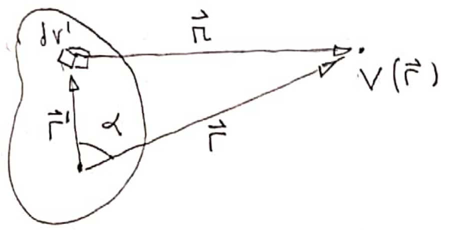
potencial lejos de un dipolo.

comparenlo con $V(\vec{r})$ para una carga puntual (monopolo):

$$V(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2} \quad , \quad V_0(\vec{r}) \sim \frac{1}{r} \quad ; \quad d.$$

el potencial del dipolo decae másrapidamente.

De manera similar podemos derivar una aproximación del potencial para una distribución de cargas $\rho(\vec{r})$:



$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\mathfrak{r}}\,dv'} \qquad (29.1)$$

$$\mathfrak{r}^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\alpha \qquad \text{(Teor. del coseno)}$$

$$\mathfrak{r}^2 = r^2\left(1 - 2\frac{r'}{r}\cos\alpha + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{r'}{r}\cos\alpha + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{-1/2}$$

de nuevo introducimos $\varepsilon \equiv \frac{r'}{r} \ll 1$ para $r \gg r'$.

<u>obs</u>: fíjense que $\vec{r}\,'$ se mueve dentro del volumen ocupado por la distribución de cargas, al hacer la integral (29.1) $r' \ll r$ si estamos lejos de la distribución.

Hacemos un desarrollo en serie de Taylor:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{r}(1+\epsilon)^{-1/2} \qquad \epsilon \equiv \left(\frac{r'}{r}\right)\left(-2\cos\alpha + \frac{r'}{r}\right) \ll 1$$

$$(1+\epsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

$$\therefore \frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)\left(-2\cos\alpha + \frac{r'}{r}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(-2\cos\alpha + \frac{r'}{r}\right)^2 + \mathcal{O}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{\underbrace{1}_{0} + \underbrace{\cos\alpha\left(\frac{r'}{r}\right)}_{1} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2}_{2} + \frac{3}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(\underbrace{4\cos^2\alpha}_{2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 4\cos\alpha\left(\frac{r'}{r}\right)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)\right\}$$

agrupando términos de igual orden ϵ:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{r}\left\{\overbrace{1}^{0} + \overbrace{\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\alpha}^{1} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\cdot\left(\frac{3\cos^2\alpha - 1}{2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)\right\}$$

Resulta que los coeficientes del desarrollo entre llaves tienen nombre propio: son los polinomios de Legendre $P_n(x)$ evaluados en $\cos\alpha$:

(30.1) $$P_0(x) = 1$$

(30.2) $$P_1(x) = x$$

(30.3) $$P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$$

$\vdots$

Por eso se puede escribir en forma compacta:

(30.4) $$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\alpha)$$

Volviendo a la ec. (29.1)

(30.5) $$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dv'\,\rho(\vec{r}\,')\cdot\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\alpha)$$

como la integral es en r'...

(30.6) $$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\cdot\int dv'\,\rho(\vec{r}\,')\cdot(r')^n\cdot P_n(\cos\alpha)}$$ Expansión Multipolar

Es util reescribirla:

(30.7) $$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\int\rho(\vec{r}\,')\,dv' + \right.$$ { contribucion monopolar $(n=0)$

$$+\frac{1}{r^2}\int r'\cos\alpha\,\rho(\vec{r}\,')\,dv'$$ { dipolar $(n=1)$

$$+\frac{1}{r^3}\int(r')^2\,\frac{3\cos^2\alpha-1}{2}\,\rho(\vec{r}\,')\,dv'$$ { cuadrupolar $(n=2)$

$$\left.+\,\mathcal{O}(r^{-4})\ldots\right\}$$

- contribución monopolar: es el primer término en el desarrollo

$$V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\int \rho(\vec{r}\,')\,dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r} \quad \therefore \quad \boxed{V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r}} \qquad (31.1)$$

donde Q es la carga total de la distribución:

$$V_1(r) \sim \frac{1}{r} \quad \text{para} \quad r\to\infty$$

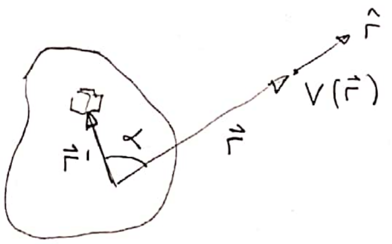
si $Q \neq 0$, ésta es la contribución dominante a largas distancias.

- contribucion dipolar: segundo término en el desarrollo multipolar.

$$(31.2) \quad V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\int r'.\cos\alpha\;\rho(\vec{r}\,')\,dv'$$

Atención: $\alpha = \alpha(\vec{r}\,')$ ya que α cambia dependiendo de la posición del elemento de carga $\rho(\vec{r}\,')\,dv'$

- Una forma de escribir la contribución dipolar de manera más compacta:



$$\vec{r}\,'.\hat{r} = r'\cos\alpha$$

$$\Rightarrow V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,\hat{r}\cdot\overbrace{\int \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')\,dv'}^{\equiv\vec{p}} \qquad (31.3)$$

Introduciendo el momento dipolar $\vec{p}$ de la distribución:

$$\boxed{\vec{p} \equiv \int \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')\,dv'} \qquad (31.4)$$

Resulta

$$\boxed{V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}} \qquad (31.5)$$

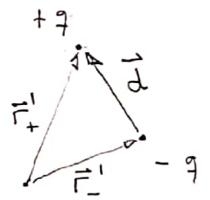
Obs: $\vec{p}$ queda determinado puramente por la distribución de carga, es decir que cargas hay y como están desparramadas en el espacio.

$$V_2(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2}$$

para cargas puntuales tendremos

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i \, \vec{r}_i^{\,\prime}$$

entonces por ejemplo para las dos cargas $+q$ y $-q$ que considera-mos al principio:

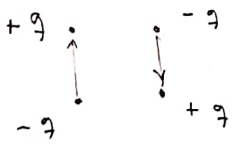


$$\vec{p} = +q\,\vec{r}_+^{\,\prime} + (-q)\,\vec{r}_-^{\,\prime} = q\,(\vec{r}_+^{\,\prime} - \vec{r}_-^{\,\prime}) = q\,\vec{d},$$

donde $\vec{d} \equiv \vec{r}_+ - \vec{r}_-$ va de la carga negativa a la positiva.

· contribucion cuadrupolar:

es el siguiente término en el desarrollo multipolar, y describe el potencial a distancias lejanas de configuraciones tipo:



que tienen $Q = 0$ y $\vec{p} = 0$.

el <u>momento cuadrupolar</u> es un tensor.

Break

<u>Sistema de coordenadas y momentos</u>

Fijense que si una carga puntual se encuentra en el origen, es un <u>monopolo puro</u>, ya que su potencial exacto es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r}$$ que es el término monopolar.

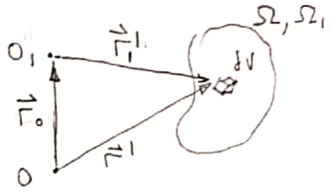
si la carga puntual se corre del origen, resulta que $\vec{p} \neq \vec{0}$!

$\vec{p} = q\,\vec{r}^{\,\prime}$ donde $\vec{r}^{\,\prime}$ es la posición de Q.

Entonces, si bien el momento monopolar Q es invariante ante un cambio de coordenadas, el momento dipolar no lo es.

Podemos decir algo más

supongamos que pasamos de un sistema de referencia O a O_1



$\vec{r}_0$ es el vector desplazamiento de O a O_1

$\vec{r}'$ posición de un elemento de carga en O

$\vec{r}_1'$ el mismo elemento en O_1

$\Rightarrow$ el momento dipolar en O_1 será:

$$\vec{P}_1 = \int_{\Omega_1} \vec{r}_1' \rho(\vec{r}_1')\, dv' = \int_{\Omega} (\vec{r}' - \vec{r}_0) \cdot \rho(\vec{r}')\, dv' = \int_{\Omega} \vec{r}' \rho(\vec{r}')\, dv' - \vec{r}_0 \int_{\Omega} \rho(\vec{r}')\, dv'$$

$$\boxed{\vec{P}_1 = \vec{P} - Q\,\vec{r}_0}$$

es decir que si el momento monopolar de la distribución se anula, esto es $Q = 0$, $\vec{P}_1 = \vec{P}$. Pero si $Q \neq 0$ el momento dipolar depende del origen del sistema de coordenadas.

Campo eléctrico de un dipolo

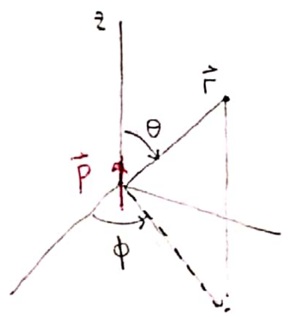
Hemos calculado el potencial $V(\vec{r})$ de un dipolo $\vec{p}$: (en el origen):

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

Vamos ahora a calcular el campo eléctrico $\vec{E} = -\nabla V(\vec{r})$.

Para esto necesitamos especificar un sistema de coordenadas.

Emplearemos coordenadas esféricas con $\vec{p}$ alineado según z



El operador gradiente es:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

con $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p \cos\theta}{r^2}$.

- notamos que $\partial_\phi V = 0$, luego $E_\phi \equiv 0$ (Tiene sentido, por simetría)

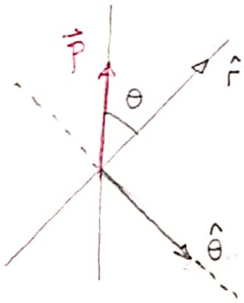
$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad ; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{-p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \; ;$$

$$\therefore \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

- obs: en $\theta = \pi/2$ resulta $E_r \equiv 0$.

Podemos re-expresar esta fórmula en términos vectoriales, para hacerla independiente del sistema de coordenadas:

El truco es que: $\left(\underline{\text{rec}}: \ \vec{p} = (\vec{p}\cdot\hat{r})\,\hat{r} + (\vec{p}\cdot\hat{\theta})\,\hat{\theta} \right)$



$$\vec{p} = p\cos\theta\,\hat{r} - p\sin\theta\,\hat{\theta} \tag{34.1}$$

$$\vec{p}\cdot\hat{r} = p\cos\theta \tag{34.2}$$

en la expresión para $\vec{E}(\vec{r})$ aparece un término $(p\cos\theta)$ y otro $(p\sin\theta)$ $\Rightarrow$ los recombinamos:

$$p\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right) = 2p\cos\theta\,\hat{r} + p\sin\theta\,\hat{\theta} = \qquad \left(\pm\, p\cos\theta\,\hat{r}\right.$$

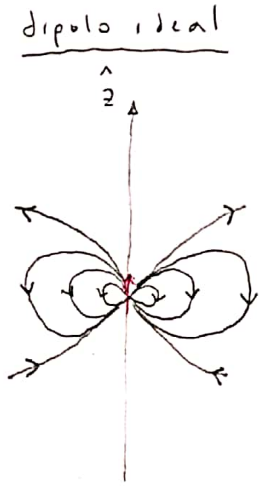
$$= 3p\cos\theta\,\hat{r} - \left(p\cos\theta\,\hat{r} - p\sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

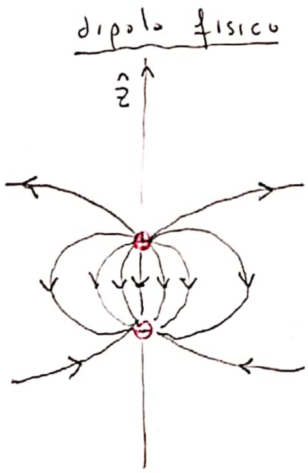
$$= 3\left(\vec{p}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{p}\,. \tag{34.3}$$

(34.4) $\therefore$ $$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\left(3(\vec{p}\cdot\hat{r})\,\hat{r} - \vec{p}\right)}$$ $\left\{\begin{array}{l}\text{campo eléctrico de} \\ \text{un dipolo } \vec{p}\end{array}\right.$

Dipolo ideal (puro) y dipolo distribuido (físico).

Aclaremos la diferencia entre: (i) dipolo <u>físico</u>, formado por dos cargas $+q$ y $-q$ separadas por cierta distancia finita $\vec{d}$ y (ii) dipolo <u>ideal</u> o puro, dado por un momento dipolar $\vec{p}$ y sin ningún otro término en el potencial. que no sea $V_2(\vec{r})$.





- para el dipolo ideal, la ec. (34.4) es la expresión exacta del campo, y su potencial está dado por (31.5). en Todo el espacio.
- para el dipolo físico las ecs. (34.4) y (31.5) son aproximaciones válidas únicamente para $r \gg d$.
- fíjense en la diferencia de $\vec{E}$ cerca del origen.
- El dipolo ideal puede obtenerse como un límite del dipolo físico tomando $d \to 0$ y $q \to \infty$ con $p = qd = cte$.