

Resumen electrostática

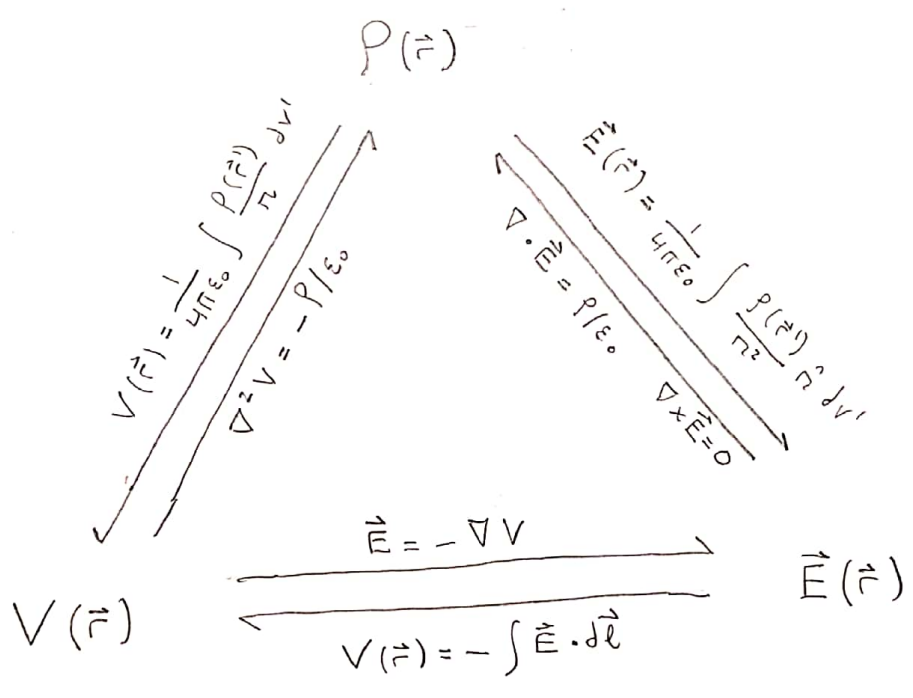
• los tres objetos claves de la Teoría :

$\rho$  : distribución de cargas

$\vec{E}$  : campo eléctrico

$V$  : potencial electrostático

• las conexiones entre ellos :



## Expansión multipolar

para una distribución de cargas localizada en el espacio

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dv'$$

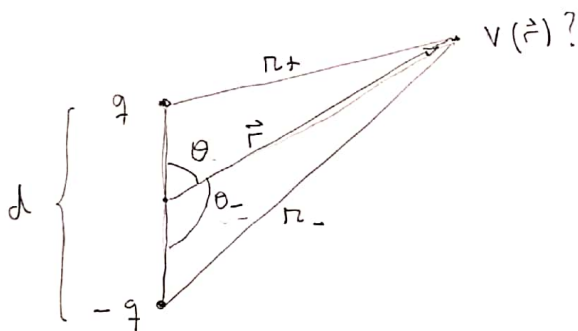
para una carga puntual en el origen

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \quad \sim \frac{1}{r} \text{ cuando } r \rightarrow \infty$$

¿Que podemos decir del potencial cuando nos alejamos de una distribución de cargas  $\rho(\vec{r}')$ ?

Empezamos por considerar un problema simple que podríamos pensar como el siguiente paso a una carga puntual: dos cargas

El dipolo eléctrico está formado por dos cargas puntuales  $q$  y  $-q$  separadas por una distancia  $d$ .

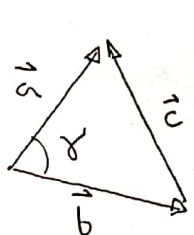


• por el principio de superposición,  $V(\vec{r}) = V_+(\vec{r}) + V_-(\vec{r})$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$$

• Esta expresión está escrita en función de dos variables  $r_+$  y  $r_-$ , nos gustaría encontrar una forma dep. de  $r$

• breve pausa para recordar:



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2 \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (\text{teor. del coseno})$$

$$r_+^2 = r^2 + (d/2)^2 - 2r \frac{d}{2} \cdot \cos \theta$$

$$r_-^2 = r^2 + (d/2)^2 - 2r \frac{d}{2} \cos \theta_- \quad ; \quad \cos \theta_- = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$r_{\pm}^2 = r^2 + (d/2)^2 \mp r d \cos \theta$$

• como nos interesa saber que sucede lejos de las cargas, es conveniente re-escribir esta expresi3n en t3rminos del n3mero  $d/r$ :

$$r_{\pm}^2 = r^2 \left[ 1 \mp \left(\frac{d}{r}\right) \cos \theta + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{r}\right)^2 \right]$$

• lejos de la distribuci3n de carga, el factor  $\epsilon = d/r \ll 1$  y podemos despreciar el t3rmino  $\sim \epsilon^2$ ;

$$\therefore \frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left( 1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2}$$

y como  $\epsilon = d/r$  es muy peque1o podemos expandir en serie de Taylor:  $(1 + a \epsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} a \epsilon + O(\epsilon^2)$

$$\frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left( 1 \pm \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos \theta \right)$$

Volviendo a la expresi3n del potencial para el dipolo, podemos ahora aproximarla

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos \theta - 1 + \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos \theta \right)$$

$$\boxed{V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q d \cos \theta}{r^2}} \quad \text{para } \frac{d}{r} \ll 1 \quad ; \quad r \gg d.$$

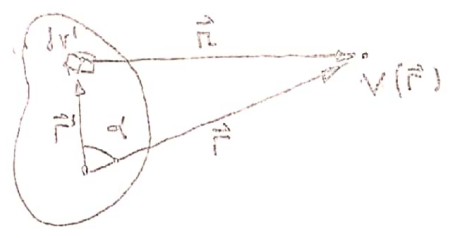
potencial lejos de un dipolo.

compararlo con  $V(\vec{r})$  para una carga puntual (monopolo):

$$V(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2} \quad , \quad V_0(\vec{r}) \sim \frac{1}{r} \quad ; \quad d.$$

el potencial del dipolo decae m3s r3pidamente.

De manera similar podemos derivar una aproximación del potencial para una distribución de cargas  $\rho(\vec{r}')$ :



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dV' \quad (29.4)$$

$$r^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \alpha \quad (\text{Teor. del coseno})$$

$$r^2 = r^2 \left( 1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \alpha + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left( 1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \alpha + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right)^{-1/2}$$

de nuevo introducimos  $\epsilon \equiv \frac{r'}{r} \ll 1$  para  $r \gg r'$ .

obs: fijense que  $\vec{r}'$  se mueve dentro del volumen ocupado por la distribución de cargas, al hacer la integral (29.4)  $r' \ll r$  si estamos lejos de la distribución.

Hacemos un desarrollo en serie de Taylor:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon)^{-1/2} \quad \text{con } \epsilon \equiv \left(\frac{r'}{r}\right) \left(-2 \cos \alpha + \frac{r'}{r}\right) \ll 1$$

$$(1 + \epsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \epsilon + \frac{3}{8} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{r} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right) \left(-2 \cos \alpha + \frac{r'}{r}\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \left(-2 \cos \alpha + \frac{r'}{r}\right)^2 + O\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right] \right\} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \underbrace{1}_0 + \underbrace{\cos \alpha \left(\frac{r'}{r}\right)}_1 - \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2}_2 + \underbrace{\frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \left(4 \cos^2 \alpha + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 4 \cos \alpha \left(\frac{r'}{r}\right)\right)}_2 + O(\epsilon^3) \right\} \end{aligned}$$

agrupando términos de igual orden  $\epsilon$ :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left\{ \underbrace{1}_0 + \underbrace{\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \alpha}_1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2}\right) + O(\epsilon^3) \right\}$$

Resulta que los coeficientes del desarrollo entre llaves tienen nombre propio = son los polinomios de Legendre  $P_n(x)$  evaluados en  $\cos \alpha$  :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$\vdots$$

Por eso se puede escribir en forma compacta :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \alpha)$$

Volviendo a la ec. (29.1)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\vec{r}') \cdot \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \alpha)$$

como la integral es en  $r'$ ...

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \int dV' \rho(\vec{r}') \cdot (r')^n \cdot P_n(\cos \alpha)$$

Expansión Multipolar

Es útil reescribirla :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') dV' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2} \int r' \cos \alpha \rho(\vec{r}') dV' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^3} \int (r')^2 \left\{ \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} \right\} \rho(\vec{r}') dV' + \right.$$

$$\left. + O(r^{-4}) \dots \right\}$$

{ contribucion monopolar (n=0)

{ dipolar (n=1)

{ cuadrupolar (n=2)

• contribución monopolar: es el primer término en el desarrollo

$$V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \quad \therefore \quad \boxed{V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}} \quad (31.1)$$

donde Q es la carga total de la distribución:

$$V_1(r) \sim \frac{1}{r} \quad \text{para } r \rightarrow \infty$$

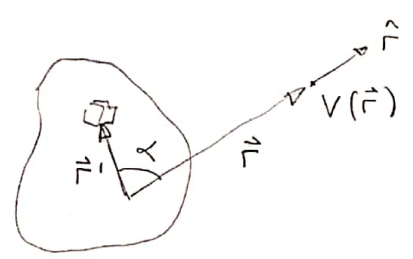
si  $Q \neq 0$  es la contribución dominante a largas distancias.

• contribución dipolar: segundo término en el desarrollo multipolar.

$$(31.2) \quad V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos\alpha \rho(\vec{r}') dV'$$

Atención:  $\alpha = \angle(\vec{r}')$  ya que  $\alpha$  cambia dependiendo de la posición del elemento de carga  $\rho(\vec{r}') dV'$

• una forma de escribir la contribución dipolar de manera más compacta:



$$\vec{r}' \cdot \hat{r} = r' \cos\alpha$$

$$\Rightarrow V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \quad \equiv \vec{P} \quad (31.3)$$

Introduciendo el momento dipolar  $\vec{P}$  de la distribución:

$$\boxed{\vec{P} \equiv \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'} \quad (31.4)$$

Resulta

$$\boxed{V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2}} \quad (31.5)$$

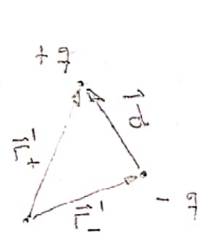
Obs:  $\vec{P}$  queda determinado puramente por la distribución de carga, es decir que cargas hay y como están desparanadas en el espacio.

$$V_2(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2}$$

para cargas puntuales tendremos

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i'$$

entonces por ejemplo para las dos cargas +q y -q que consideramos al principio:

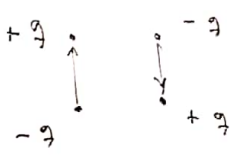


$$\vec{P} = +q \vec{r}_+' + (-q) \vec{r}_-' = q (\vec{r}_+' - \vec{r}_-') = q \vec{d}$$

donde  $\vec{d} \equiv \vec{r}_+' - \vec{r}_-'$  va de la carga negativa a la positiva.

• contribucion cuadrupolar:

es el siguiente término en el desarrollo multipolar, y describe el potencial a distancias lejanas de configuraciones tipo:



que tienen  $Q = 0$  y  $\vec{P} = 0$ .

el momento cuadrupolar es un tensor.

### Sistema de coordenadas y momentos

Fijense que si una carga puntual se encuentra en el origen, es un monopolo puro, ya que su potencial exacto es

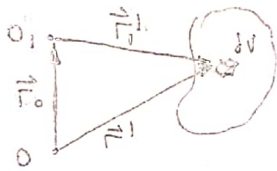
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \text{que es el término monopolar.}$$

si la carga puntual se corre del origen, resulta que  $\vec{P} \neq \vec{0}$ !

$$\vec{P} = q \vec{r}' \quad \text{donde } \vec{r}' \text{ es la posición de } Q.$$

Entonces, si bien el momento monopolar Q es invariante ante un cambio de coordenadas, el momento dipolar no lo es.

Podemos decir algo más



$\vec{r}_0$  es el vector desplazamiento de  $O$  a  $O_1$   
 $\vec{r}'$  posición de un elemento de carga en  $O$   
 $\vec{r}$  el mismo elemento en  $O_1$

$\Rightarrow$  el momento dipolar en  $O_1$  será:

$$\vec{P}_1 = \int \vec{r}'_1 \rho(\vec{r}'_1) dv' = \int (\vec{r}' - \vec{r}_0) \cdot \rho(\vec{r}') dv' = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' - \vec{r}_0 \int \rho(\vec{r}') dv'$$

$$\vec{P}_1 = \vec{P} - Q \vec{r}_0$$

es decir que si el momento monopolar de la distribución se anula, esto es  $Q=0$ ,  $\vec{P}_1 = \vec{P}$ . Pero si  $Q \neq 0$  el momento dipolar depende del origen del sistema de coordenadas.

### Campo eléctrico de un dipolo

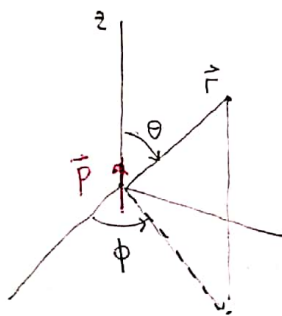
Hemos calculado el potencial  $V(\vec{r})$  de un dipolo  $\vec{P}$  (en el origen):

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

Vamos ahora a calcular el campo eléctrico  $\vec{E} = -\nabla V(\vec{r})$ .

Para esto necesitamos especificar un sistema de coordenadas:

Emplearemos coordenadas esféricas con  $\vec{P}$  alineado según  $z$



El operador gradiente es:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

con  $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P \cos \theta}{r^2}$

notamos que  $\partial_\phi V = 0$ .

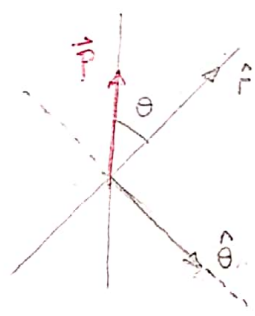
$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad ; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{-P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} ;$$

$$\therefore \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$



Podemos re-exresar esta fórmula en términos vectoriales, para hacerla independiente del sistema de coordenadas:

El Truco es que:  $\vec{p} = (\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} + (\vec{p} \cdot \hat{\theta}) \hat{\theta}$



$$\vec{p} = p \cos \theta \hat{r} - p \sin \theta \hat{\theta} \tag{34.1}$$

$$\vec{p} \cdot \hat{r} = p \cos \theta \tag{34.2}$$

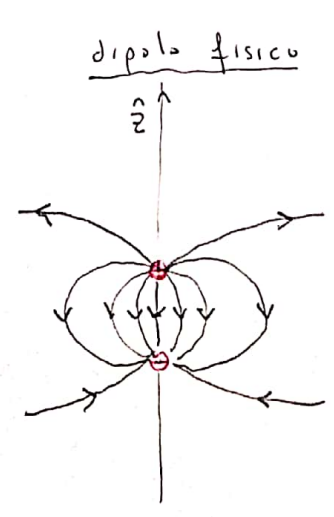
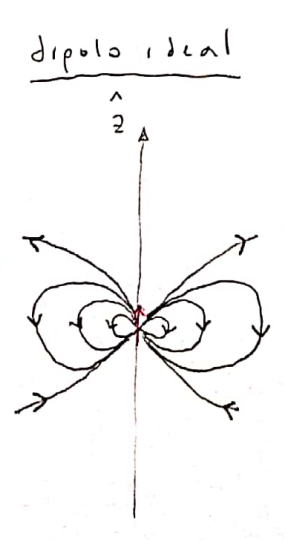
en la expresión para  $\vec{E}(\vec{r})$  aparece un término  $(p \cos \theta)$  y otro  $(p \sin \theta) \Rightarrow$  los re-combinamos:

$$\begin{aligned} p(2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) &= 2 p \cos \theta \hat{r} + p \sin \theta \hat{\theta} = (\pm p \cos \theta \hat{r} \\ &= 3 p \cos \theta \hat{r} - (p \cos \theta \hat{r} - p \sin \theta \hat{\theta}) \\ &= 3 (\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}. \end{aligned} \tag{34.3}$$

$$(34.4) \therefore \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p})} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{campo eléctrico de} \\ \text{un dipolo } \vec{p} \end{array} \right.$$

Dipolo ideal (puro) y dipolo distribuido (físico).

Aclaremos la diferencia entre: (i) dipolo físico, formado por dos cargas  $+q$  y  $-q$  separadas por cierta distancia finita  $\vec{d}$  y (ii) dipolo ideal o puro, dado por un momento dipolar  $\vec{p}$  y sin ningún otro término en el potencial. que no sea  $V_2(\vec{r})$ .



- para el dipolo ideal, la ec. (34.4) es la expresión exacta del  $\vec{E}$  campo, y su potencial está dado por (31.5) en todo el espacio.
- para el dipolo físico las ecs. (34.4) y (31.5) son aproximaciones válidas únicamente para  $r \gg d$ .
- fijense en la diferencia de  $\vec{E}$  cerca del origen.
- El dipolo ideal puede obtenerse como un límite del dipolo físico tomando  $d \rightarrow 0$  y  $q \rightarrow \infty$  con  $p = qd = \text{cte.}$