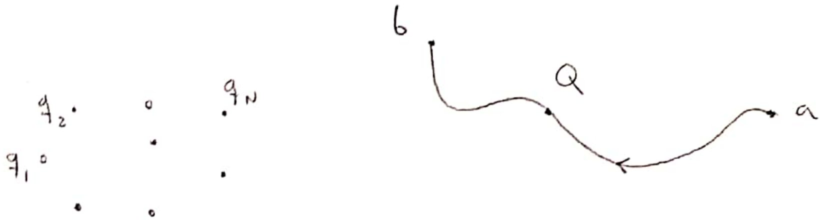
Trabajo y energía

Si tenemos una distribución de cargas en el espacio, digamos cargas puntuales, estas generan un campo que vá a ejercer una fuerza sobre una carga de prueba Q:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^2}\,\hat{r}_i \qquad \vec{F}_e = Q\,\vec{E}(\vec{r})$$

Si deseamos mover la carga Q por este campo, vamos a tener que hacer un Trabajo.

Para empezar, si quisiéramos mantener a Q en su lugar, tendríamos que hacer nosotros una fuerza $\vec{F} = -\vec{F}_e = -Q\vec{E}$.

Para mover la carga Q desde un punto $\vec{a}$ a otro $\vec{b}$, a cada momento deberemos ejercer una fuerza mínima $\vec{F} = -Q\vec{E}(\vec{r})$ que va cambiando a medida que recorremos el camino.

Entonces, el Trabajo de debemos hacer nosotros para mover a Q desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$ será

$$W = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

; a cada paso infinitesimal $d\vec{l}$ a lo largo de la curva hacemos un trabajo $dW = \vec{F}\cdot d\vec{l}$

con $\vec{F} = -Q\vec{E}$

$$W = \int_a^b (-)\,Q\vec{E}\cdot d\vec{l} = -Q\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} \; ;$$

esta ultima integral no es ni mas ni menos que $V(\vec{r}) = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$

$$\therefore \quad \boxed{W = Q\left(V(\vec{b}) - V(\vec{a})\right)}$$

obs: el resultado no depende del camino tomado es decir que la fuerza electrostática es conservativa.

(37.1) $$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = \frac{W}{Q}$$ es el trabajo por unidad de carga para mover Q desde $\vec{a}$ a $\vec{b}$

Si tomamos el punto de referencia del potencial en el infinito como suele hacerse, el trabajo necesario para traer una carga de prueba Q desde el infinito hasta $\vec{r}$ es

(37.2) $$\boxed{W = Q\,V(\vec{r})}$$

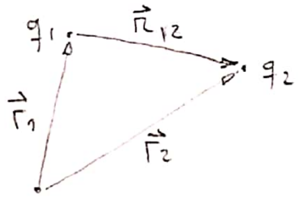
La energía de una distribución de cargas

¿que Trabajo debemos realizar para armar una distribución de cargas puntuales?

Calculemos primero el Trabajo necesario para acercar dos cargas q_1 y q_2 hasta sus posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ desde el infinito.

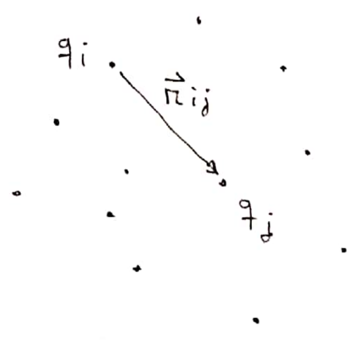
$$V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$$ es el potencial debido a q_1

$$W_2 = q_2 V_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$ es el trabajo necesario para traer a q_2 en presencia de este potencial



Consideramos ahora una configuración de N cargas q_i en posiciones $\vec{r}_i$ $i = 1\ldots N$. Para cada par de cargas por separado, $\{q_i, q_j\}$ el Trabajo necesario para acercar el par aislado sería

$$W_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$



Ahora, como por el principio de superposición la fuerza Total sobre cualquier carga es la suma de las fuerzas debidas a Todas las cargas presentes, el Trabajo Total para armar la configuración de cargas será

$$W = \sum_{\text{pares}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\text{pares}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad (38.1)$$

donde la suma es una suma sobre Todos los pares de cargas.

Esta será entonces la energía almacenada en la configuración de cargas puntuales.

Podemos dar una derivación más formal de (38.1). Supongan que armamos la configuración de cargas Trayéndolas una por una desde el infinito.

La primera carga q_1 la Traemos hasta $\vec{r}_1$ sin hacer Trabajo: $W_1 = 0$

La segunda carga q_2 la Traemos en el poTencial $V_1(\vec{r})$ generado por q_1:

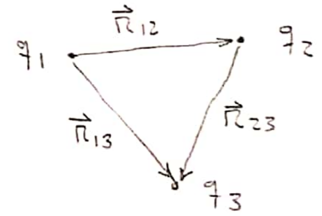
$$V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r} \qquad q_1 \xrightarrow{\vec{r}_{12}} q_2$$

El Trabajo realizado es:

$$W_2 = q_2 \cdot V_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Al traer la Tercera carga q_3, el poTencial debido a q_1 y q_2

$$V_{12}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) \quad \text{(superposición)}$$



$$W_3 = q_3 \cdot V_{12}(\vec{r}_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{22}} \right)$$

El Trabajo necesario para ensamblar estas Tres cargas:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right).$$

Si ahora agregamos la cuarta carga q_4, el poTencial presente

$$V_{123}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \right) \Rightarrow W_4 = q_4 V_{123}(\vec{r}_4), \text{ y:}$$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right)$$

Vamos viendo que acá hay un patrón; y podemos adivinar que:

$$(39.1) \quad \boxed{W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$$

Una manera de probar esto es por inducción

. suponemos que vale para n : $W^{(n)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$

. al traer la carga $(n+1)$:

$$W^{(n+1)} = W^{(n)} + W_{n+1}$$

$$W_{n+1} = q_{n+1} \cdot V_n(\vec{r}_{n+1}) = q_{n+1} \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_{i\,n+1}} \right\}$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i q_{n+1}}{r_{i\,n+1}}$$

Entonces el Trabajo Total:

$$W^{(n+1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i q_{n+1}}{r_{i\,n+1}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=i+1}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} + \frac{q_i q_{n+1}}{r_{i\,n+1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \Big\}$$

↳ no cambia nada extender esta suma

$\therefore$ vale $\forall\, n \Rightarrow$ vale (39.1).

<u>obs</u>: la suma en (39.1) evita repetir pares y evita $i=j$

otra manera de escribirla es:

$$(39.2) \quad \boxed{W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$$

{cuento los pares dos veces pero divido el total por 2.

También:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\text{pares}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$ que es la (38.1)

PAUSA

vamos a reescribir la ec. (39.2):

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \left\{ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_j}{r_{ij}} \right\} \qquad (40.0)$$

lo que quedó entre llaves es el potencial generado por todas las cargas, exceptuando la i-ésima: evaluado en $\vec{r}_i$

$$V_{-i}(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_j}{r_{ij}}$$

con lo que

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V_{-i}(\vec{r}_i) \qquad (40.1)$$

esta expresión es el trabajo necesario para "armar" la distribución de cargas. El trabajo realizado queda "almacenado" en la configuración como energía electrostática.

Energía de una distribución continua

Supongamos que una distribución continua $\rho(\vec{r})$ en un volumen.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} dq\, V(\vec{r}\,') \qquad (40.2)$$

$dq = \rho(\vec{r}\,')\, d\mathcal{V}'$

OJO notación:
V: potencial
$\mathcal{V}$: volumen

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}\, \rho(\vec{r}\,') V(\vec{r}\,') \qquad (40.3)$$

podemos usar la ley de Gauss para reescribir el integrando:
$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int d\mathcal{V}\, (\nabla \cdot \vec{E})\, V \qquad (40.4)$$

En el integrando aparecen $\vec{E}$ y V, que están relacionados.

$$\nabla \cdot (V\vec{E}) = V(\nabla \cdot \vec{E}) + (\nabla V) \cdot \vec{E} \qquad (40.5)$$

(regla de la cadena)

Integrando en volumen

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}\, \nabla \cdot (V\vec{E}) = \underline{\int d\mathcal{V}\, (\nabla \cdot \vec{E})\, V} + \int d\mathcal{V}\, (\nabla V) \cdot \vec{E} = \oint_S (V\vec{E}) \cdot d\vec{s} \qquad (40.6)$$

Teorema de la divergencia

$$(41.1)\quad W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{ \oint_S V\vec{E}\cdot d\vec{s} - \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}\,(\nabla V)\cdot\vec{E} \right\}$$

y como $\vec{E} = -\nabla V$ resulta $(\nabla V)\cdot\vec{E} = -\vec{E}\cdot\vec{E} = -|\vec{E}|^2 = -E^2$;

$$(41.2)\quad W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{ \oint_S V\vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{\mathcal{V}} E^2\, d\mathcal{V} \right\}$$

Ahora fíjense que el volumen de integración $\mathcal{V}$ es el volumen ocupado por la distribución de carga $\rho(\vec{r})$ en (40.3). Como $\rho(\vec{r}) = 0$ afuera de este volumen, podemos extender $\mathcal{V}$ (y S) más allá de los límites de la distribución sin cambiar el resultado de (40.3) ni de (41.2). Al extender el volumen $\mathcal{V}$ y la superficie S que lo envuelve, pasan dos cosas:

- como $E^2 > 0$, la integral en volumen aumenta.
- la integral en superficie debe entonces disminuir, ya que el total no cambia.

Tiene sentido, porque el campo decae como $E \sim 1/r^2$ y el potencial como $V \sim 1/r \Rightarrow VE \sim 1/r^3$ a lo sumo (sino más rápido), mientrastanto $ds \sim r^2 \Rightarrow$ el integrando decae al menos como $1/r$ a medida que la superficie aumenta.

En particular, podemos extender el volumen a todo el espacio de manera que la integral de superficie va a cero, y:

$$(41.3)\quad \boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\, d\mathcal{V}}$$ (la integral en todo el espacio)

Podemos definir una densidad local de energía electrostática

$$(41.4)\quad u(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(\vec{r})$$

que podemos interpretar como la energía contenida en el campo electrostático en la posición $\vec{r}$ por unidad de volumen.

$$(41.5)\quad U = \int d\mathcal{V}\, u(\vec{r})$$

Entonces, la energía electrostática ¿está en el campo $\vec{E}$?
Si volvemos a la ec. (39.2) podríamos decir que la energía

"está" en las cargas, o "la tienen" las cargas de la configuración, ya que si las "soltamos" o liberamos de sus posiciones en la configuración las cargas se acelerarán ganando energía cinética.

En electrostática ésta es una discusión sin mucho sentido, y realmente no importa mucho "donde está" la energía. Solo que uno puede calcularla apartir de la distribución de cargas ec. (40.0) o a partir del campo eléctrico ec. (41.3).

Mas adelante veremos que en realidad tiene sentido pensar que la energía está en el campo, ya que cuando tenemos cargas em movimiento, y una de ellas se acelera, se irradian campos electromagnéticos que transportan energía (y momento!) a través del espacio.

La energía de una carga puntual.

Si donde hay un campo electrico puedo definir una densidad de energía $u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$, una carga puntual aislada genera un campo $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ con una energia por unidad de volumen

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \cdot \frac{q^2}{r^4}$$

entonces, con $dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$,

$$W = \int dv \, u(\vec{r}) = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \cdot \int \frac{1}{r^4} (r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi)$$

$$W = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \phi}}{2\pi} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \theta}}{2} \cdot \int \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{-1}{r}\right]_0^\infty \longrightarrow \infty$$

Es decir, la energía de una carga puntual diverge.

El problema está al pasar de la ec. (40.1) a la (40.2).
En la (40.1) el potencial excluye a la carga i; es decir, no considera la autointeracción de la carga i consigo misma.
En la ec. (40.2) ~~lel~~ el potencial es el potencial total, y esto

no representa un problema porque en una distribución continua de carga, la carga dq presente en un pequeño volumen es infinitesimal.

Dicho de otra manera: la ec. (40.0) o (40.1) representan el trabajo realizado para armar una distribución de cargas puntuales, pero no consideran el trabajo necesario para producir las cargas puntuales individuales, (a partir de cargas infinitesimales). Y este trabajo diverge.

⇒ Pareciera que las cargas puntuales son incompatibles con la idea de que la energía esta en los campos.

Es un problema de la teoría del electromagnetismo que persiste hasta hoy, incluso en la versión cuantica de la ED.