# Conductores en electrostática.

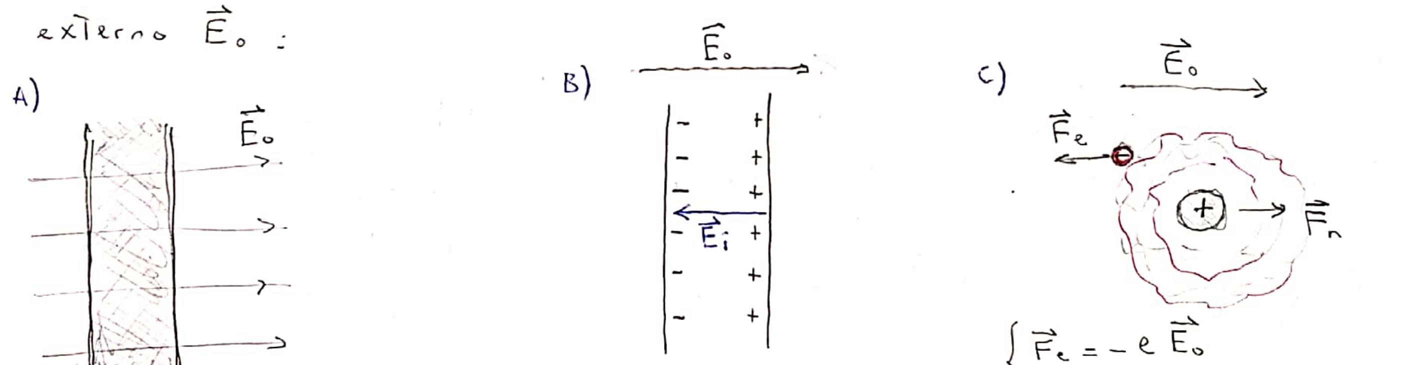
Un conductor es un material cuyos átomos tienen electrones "mas sueltos" que pueden moverse libremente de un lado a otro. En un aislante, por el contrario, los electrones se encuentran ligados a sus respectivos núcleos y por lo tanto no pueden ser transportados.

- Vamos a considerar conductores ideales, que son materiales con una cantidad ilimitada de electrones libres.

Consideraremos a continuación las propiedades electrostaticas de los conductores ideales.

* El campo eléctrico dentro de un conductor es nulo : $\vec{E} = \vec{0}$.

Imaginemos que colocamos un conductor con forma de placa de cierto espesor, en una región en la que hay un campo eléctrico externo $\vec{E}_0$ :




$$\begin{cases} \vec{F}_e = -e\,\vec{E}_0 \\ \vec{F}_n = +q_n\,\vec{E}_0 \end{cases}$$

Los electrones libres se moveran en la dirección opuesta del campo. Se desplazan hasta llegar al borde de la placa, desparramándose sobre la cara izquierda mientras que en la cara derecha quedan cargas excedentes positivas de los núcleos atómicos que cedieron los electrones. [illegible]

Se establece así un campo eléctrico inducido $\vec{E}_i$, producido por ésta separación de cargas dentro del conductor. Este campo inducido $\vec{E}_i$ apunta en la dirección contraria a $\vec{E}_0$, reduciendo el campo total dentro del conductor. La separación de cargas continúa hasta que $\vec{E}_i = -\vec{E}_0$ ; en esa situación el campo total dentro del conductor se anula: $\vec{E} = \vec{0}$.

Entonces, en una situación electrostática, las cargas libres dentro de un conductor se redistribuyen de manera de compensar campos externos y el campo dentro del conductor es $\vec{E} = \vec{0}$.

obs: si no fuera nulo, los portadores de carga se moverían hasta generar un campo inducido compensatorio.

* La densidad de carga es nula dentro de un conductor : $\rho = 0$.

Esto sigue de la ley de Gauss $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Si el campo es nulo $\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \therefore \rho = 0$

obs: en el cuerpo del conductor SI hay cargas: de los núcleos ⊕ y sus electrones ⊖; pero estas estan compensadas de modo que $\rho = 0$.

* Las cargas estan en la superficie: no pueden estar en el cuerpo del conductor porque $\rho = 0 \Rightarrow$ se distribuyen en la superficie.

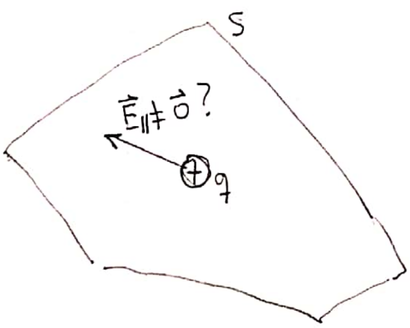
NOTA: nos referimos acá a cargas adicionales que pueda tener un conductor (no neutro, con $Q \neq 0$).

* Los conductores son equipotenciales. Dicho de otra manera, el potencial V es constante en un conductor, tanto en el cuerpo del mismo como en sus superficies.

Como $\vec{E} = \vec{0}$, si consideramos dos puntos cualesquiera del conductor:

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{0} \quad \therefore \quad V(\vec{b}) = V(\vec{a}) \quad \forall\, \vec{a}, \vec{b}$$

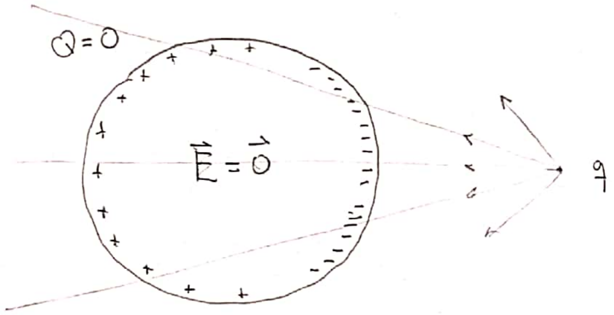
* El campo eléctrico es perpendicular a la superficie del conductor




Si $\vec{E}_\parallel$ fuera no nulo en la superficie S del conductor, estos campos tangenciales generarían una fuerza y moverían las cargas libres allí ubicadas produciendo su redistribución.

# Inducción de cargas en las superficies y cavidades.

Imaginen que tenemos un conductor neutro, es decir sin carga, digamos que es esférico. Acercamos una carga puntual $q$ al conductor.



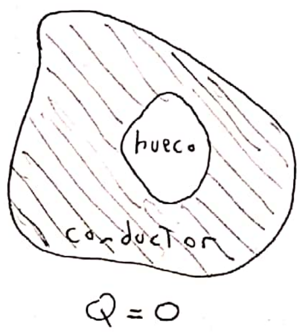

Las cargas libres del conductor se redistribuyen de manera que $\vec{E}=\vec{0}$ dentro. [Pregunta para pensar ustedes ¿Como será el campo generado por las cargas distribuidas? ¿Como se distribuyen las cargas?]

Cargas negativas se distribuirán en el polo más cercano a la carga $q$, mientras cargas positivas se distribuirán en la superficie del polo opuesto, generando una distribución superficial de cargas inducidas, no homogénea.

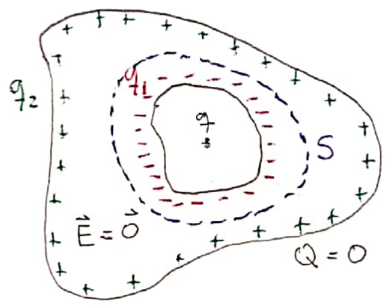
Si bien el conductor es neutro, y su carga neta $Q=0$, resulta que las cargas negativas están más cerca de $q$ que las cargas positivas del polo opuesto. Como el campo generado por $q$ decae ($\sim 1/r^2$) la fuerza sobre las cargas negativas va a ser mayor que sobre las cargas positivas.

(!) Resulta entonces que $q$ produce una fuerza neta $F>0$ sobre el conductor, a pesar de que el mismo está descargado.

Imaginemos ahora un conductor neutro, con una cavidad. en su interior, es decir con un hueco vacío.



Supongamos ahora que colocamos la carga puntual q dentro de la cavidad interna del conductor:




El campo dentro del cuerpo del conductor tiene que ser nulo, pero en la cavidad, ahora $\vec{E} \neq \vec{0}$.

Habra cargas negativas ⊖ inducidas en la superficie interna de la cavidad. Como lo sabemos?

Si consideramos una superficie Gaussiana S (en azul) que esté completamente dentro del conductor y que contenga la cavidad, tendremos por la ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q_{enc}$$

donde $Q_{enc} = q + q_1$ es la carga encerrada por la superficie S, e incluye la carga puntual q y la carga inducida $q_1$ en la superficie de la cavidad.

Como $\vec{E}=\vec{0}$ en toda la superficie S (que está dentro del conductor) resulta

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{enc} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = -q \quad \}$$

Es decir que la carga inducida en la superficie ~~anterior~~ de la cavidad interna es $(-q)$.

Como el conductor es neutro, su carga neta es nula, por lo tanto la carga inducida en la superficie externa será

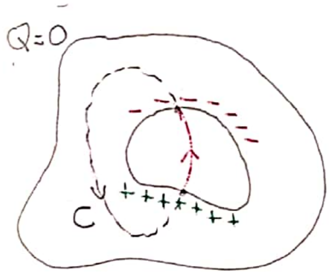
$$q_2 = -q_1 = -(-q) = q \quad \} \qquad \text{ya que } q_1 + q_2 \equiv 0 \text{ (neutro)}$$

{ obs: el conductor "aisla" el exterior de la cavidad y viceversa
"Lo que pasa en el conductor queda en el conductor".

Los campos externos no lo penetran y los campos internos no pueden enterarse de la distribución de carga $q_2$.

Imaginemos ahora un conductor neutro, con una cavidad interna, pero ahora la <u>cavidad</u> está <u>vacía</u>.

En este caso ¿que podemos decir del campo eléctrico?



Supongamos por un momento que $\vec{E} \neq \vec{0}$: las cargas libres están distribuidas del algun modo en la superficie de la cavidad, dando lugar a un campo eléctrico interno.

Las lineas de este campo salen de cargas positivas y mueren en cargas negativas. Si ahora consideramos una curva cerrada C que siga una linea de campo dentro de la cavidad, y cierre su camino circulando por el cuerpo interno del conductor:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = \underbrace{\int_{\text{cavidad}} \vec{E} \cdot \vec{dl}}_{>0} + \underbrace{\int_{\text{cuerpo}} \vec{E} \cdot \vec{dl}}_{\equiv 0} > 0 \;!$$

esto es imposible ya que sabemos que $\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$.

$\therefore \vec{E} = \vec{0}$ dentro de una cavidad vacía.

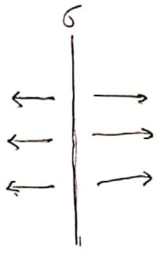
$\nexists$ carga inducida en su superficie.

<u>obs</u>: este es el principio de la <u>jaula de Faraday</u>.

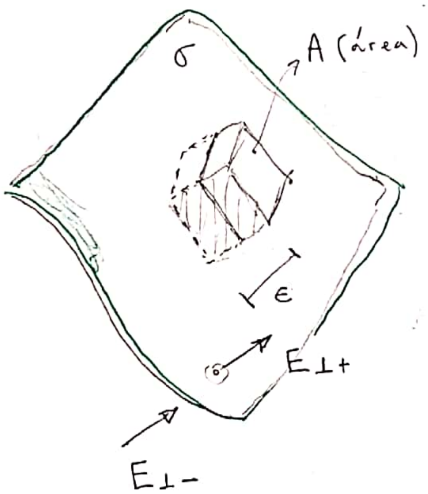
## Condiciones de contorno para $\vec{E}$ y $V$ (generales)

Como hemos visto, en presencia de conductores es frecuente que tengamos que considerar distribuciones superficiales de carga. Por este motivo, además de consideraciones más generales, es interesante detenernos a estudiar qué sucede con $\vec{E}$ y $V$ en superficies cargadas con cierta densidad $\sigma$.

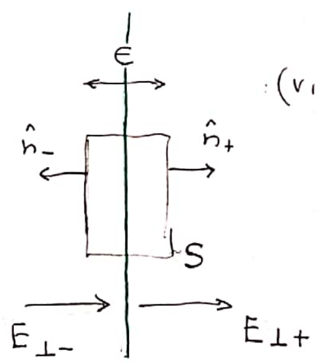
Queda claro que en presencia de una superficie cargada $\sigma$ el campo eléctrico tiene una discontinuidad:




Imaginemos una superficie arbitraria con cierta densidad de carga superficial $\sigma$. Consideremos una superficie gaussiana




con forma de cajita atravesando la superficie de carga de manera que sus tapas sean paralelas a la sup. de carga y $\sigma$ sea ~ constante dentro de la cajita. Esto podemos lograrlo considerando una caja pequeña. Además supondremos que las paredes de la caja son de una altura $\epsilon$ pequeña.




Aplicando la Ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot Q_{enc} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

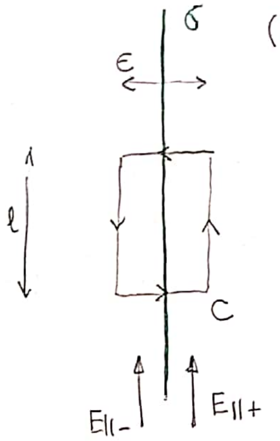
Si hacemos $\epsilon \to 0$, el flujo de $\vec{E}$ por los laterales será despreciable, con lo que tendremos

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{tapa(+)} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{tapa(-)} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \cancel{\int_{lateral} \vec{E}\cdot d\vec{l}} = E_{\perp +}\cdot A - E_{\perp -} A$$

$$\therefore \boxed{E_{\perp -} - E_{\perp +} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Este es el valor de la discontinuidad en la componente del campo normal a la superficie cargada. (En particular $E_\perp$ es continuo si $\sigma = 0$).

¿Que sucede con la componente Tangencial a la superficie, $\vec{E}_\parallel$ ?




Consideramos ahora una curva cerrada C que circula paralela a la superficie σ.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 . \qquad (50.1)$$

La curva tiene contribuciones de los Tramos paralelos y los perpendiculares (de altura ε). Estos ultimos no contribuyen si Tomamos como antes $\epsilon \to 0$.

$$\therefore \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\parallel +} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\parallel -} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{\parallel +} \cdot l - E_{\parallel -}\, l = 0$$

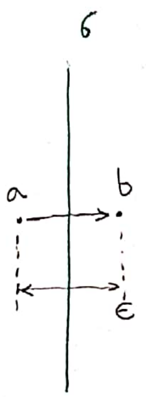
(50.2) $\quad \therefore \boxed{E_{\parallel +} = E_{\parallel -}}$ la componente del campo paralela a una superficie de carga es continua.

En forma vectorial podemos unir ambas condiciones de contorno para $\vec{E}$ en una superficie σ:

(50.3) $$\boxed{\vec{E}_+ - \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{n}}$$

definiendo $\hat{n}$ como la normal en la dirección del lado (+).

¿Que podemos decir acerca del <u>potencial V</u> ?




$$V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0 .$$

$$V_+ - V_- = 0$$

$$\therefore \boxed{V_+ = V_-} \qquad \text{el } \underline{\text{potencial es continuo}}.$$

(50.4)

Entonces, al cruzar una superficie con una densidad de carga $\sigma$, el potencial es continuo pero su gradiente tiene una discontinuidad:

$$\nabla V = -\vec{E}$$

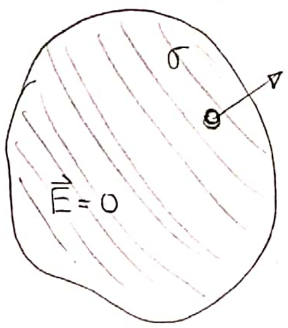
(51.1) $$\nabla V_+ - \nabla V_- = -\vec{E}_+ + \vec{E}_- = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

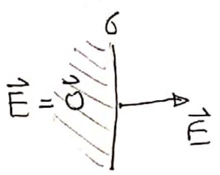
<u>obs</u>: esta ultima ec. es vectorial; se puede formular como escalar si proyectamos la componente normal

$$\frac{\partial V}{\partial n} \equiv \nabla V \cdot \hat{n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \qquad (51.2)$$

Con este arsenal de condiciones de contorno volvemos a los conductores y sus superficies.

* <u>Densidad superficial de carga en un conductor</u>.




Dentro del conductor el camo es nulo.
El campo inmediatamente fuera del conductor lo podemos obtener de (50.3):

$$\vec{E}_+ - \underbrace{\vec{E}_-}_{0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

(51.3) $$\boxed{\therefore\ \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

es el campo justo afuera de la superficie del conductor. $\Rightarrow$ como habiamos anticipado al comienzo, el campo es normal a la superficie del conductor. Ahora además sabemos relacionarlo con $\sigma(\vec{r}\,')$.

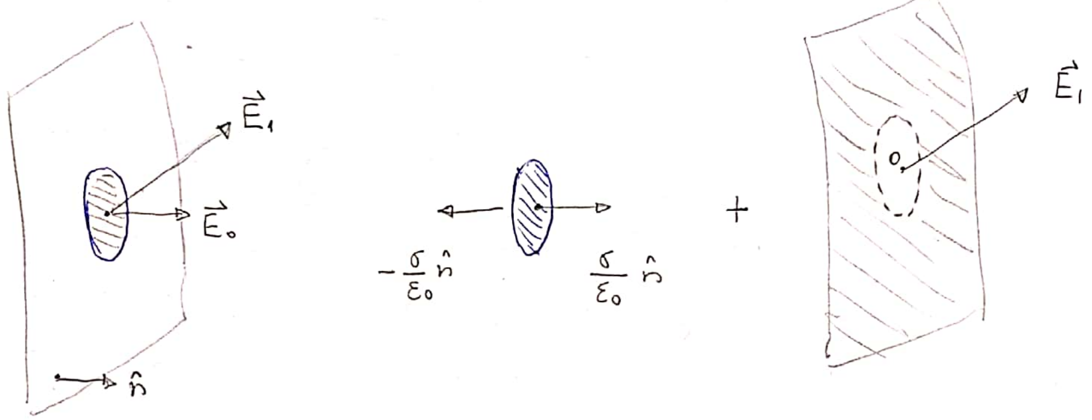
<u>obs</u>: en términos del potencial, la ec. (51.2) nos dice que

(51.4) $$\boxed{\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}}$$

Esto es muy lindo porque las ecs. (51.3) y (51.4) nos permiten determinar $\sigma$ si conocemos $\vec{E}$ o $V$. Es decir, podemos decir de que manera se distribuyen las cargas en la superficie!

## * Fuerza sobre un conductor y presión electrostática

Una distribución superficial de carga $\sigma$ —por ejemplo, la superficie de un conductor— experimenta una fuerza electrostática en presencia de un campo.




Consideremos un disco pequeño en la superficie, y "recortémoslo". Por superposición, el campo en cualquier punto lo podemos escribir como la suma de dos contribuciones, la del disco $\vec{E}_0$ y la del resto $\vec{E}_1$, que incluye el resto de la superficie y otros campos presentes.
Luego de recortado el disco, el campo $\vec{E}_1$ es contínuo allí ya que ahora $\sigma = 0$ en el agujero.
La discontinuidad en $\vec{E}$ viene del disco mismo, que genera un campo $\pm\vec{E}_0 = \pm\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$ a un lado y a otro.

Los campos de uno y otro lado serán:

$$\vec{E}_+ = \vec{E}_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

$$\vec{E}_- = \vec{E}_1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

$\Rightarrow \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 2\vec{E}_1$ y resulta: $\vec{E}_1 = \frac{1}{2}(\vec{E}_+ + \vec{E}_-)$

Es decir que la fuerza sobre el disco estará dada por el promedio de los campos a uno y otro lado debidos al <u>resto</u> de las cargas presentes—!

<u>obs</u>: el propio disco no puede ejercer una fuerza sobre sí mismo.

En particular, para un conductor tenemos $\vec{E}_- = 0$ y

$\vec{E}_+ = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$

Podemos entonces concluir que la fuerza sobre el disco que recortamos es:

$$\vec{F}_1 = \sigma . A \vec{E}_1 = A \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} . \hat{n}$$

o mejor, la fuerza por unidad de área, que llamaremos presión electrostática, será

$$\boxed{\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \hat{n}}$$

obs: la densidad de carga $\sigma$ aparece al cuadrado.
Independientemente del signo de la carga, éste resultado describe una fuerza que empuja al conductor en la dirección del campo eléctrico.