

• $\vec{E} = \vec{0}$ en el interior de un conductor. Por "interior" nos referimos al cuerpo material interno del conductor.

• El campo eléctrico es perpendicular a la superficie del conductor
 $\vec{E} = E \hat{n}$ donde \hat{n} es un vector normal a la superficie en cada punto.

• Los conductores son equipotenciales. Es decir $V = \text{cte.}$ Tanto en el interior como en las superficies de un conductor.

OJO: esto NO quiere decir que $V=0$. El campo es nulo, y por lo tanto el potencial no varía de un punto a otro.

• El campo es cero dentro de una cavidad vacía de un conductor.

• Puede haber un campo eléctrico no nulo en una cavidad, si dentro de la misma existe una carga neta.

De todos modos, en el cuerpo interior del conductor, el campo sigue siendo cero: no hay vuelta, $\vec{E} = \vec{0}$ en el interior.

• La densidad de carga $\rho(\vec{r})$ es nula en el interior de un conductor.

• Las cargas —netas o inducidas— se encuentran en la superficie.

• En la superficie de un conductor con carga $\sigma(\vec{r})$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

• y existe una fuerza por unidad de área $\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{n}$

• aún si la carga neta es cero, puede haber una fuerza sobre un conductor que se encuentra en un campo.

Ecuación de Laplace

Repasando el problema que nos propusimos abordar en la primera clase: la pregunta que buscamos responder en electrostática es, dada una distribución de cargas $\rho(\vec{r})$, ¿Cuál es el campo eléctrico que genera? La ley de Coulomb:

(55.1)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \rho(\vec{r}') \cdot \frac{\hat{\vec{r}}}{r^2} \quad \text{con } \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Como habrán podido experimentar, esta integral vectorial suele ser complicada. Vimos que una alternativa es calcular primero el potencial $V(\vec{r})$, que es un campo escalar:

(55.2)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \rho(\vec{r}') \frac{1}{r}$$

El problema ahora es que, en presencia de conductores, puede que no conozcamos como las cargas están distribuidas. Por ejemplo, si acercamos una carga puntual q a una esfera conductora neutra, como vimos la clase pasada va a haber una densidad de carga inducida en la superficie de la esfera, pero a priori ignoramos como ρ depende de la posición en la esfera. Entonces no podemos calcular $V(\vec{r})$ con (55.2) porque desconocemos $\rho(\vec{r})$.

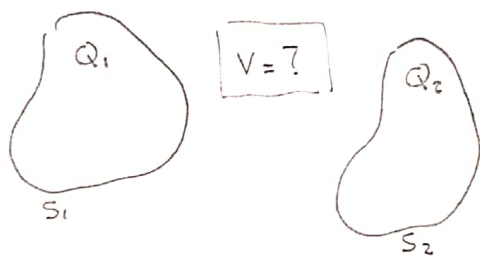
En estos casos, veremos que una opción es resolver la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

junto con las condiciones de contorno adecuadas. En el caso de conductores, puede que nos interese resolver el problema con $\rho=0$, la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

Por ejemplo, un conjunto de conductores con cargas conocidas:



• ¿qué podemos decir del potencial en el espacio entre ellos?

• los conductores son equipotenciales V_1, V_2
 \Rightarrow esto nos da condiciones de contorno en las superficies S_1, S_2

• en el espacio vacío, $\nabla^2 V = 0$.

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

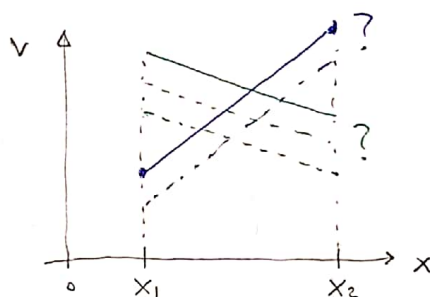
Para ganar intuición sobre las propiedades de ésta ecuación consideremos primero sus versiones 1D y 2D.

Ec. de Laplace 1D:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0.$$

esta la sabemos integrar:

$$V(x) = mx + b$$



La solución es una recta. Pero ¿que recta?

Tenemos dos constantes de integración indefinidas \underline{m} y \underline{b} .

Para determinarlas, debemos especificar las condiciones de contorno.

Hay distintas maneras de hacer esto:

• podemos dar los valores de $V(x)$ en los bordes x_1 y x_2

$$\text{Esto nos proporciona dos ecuaciones } V(x_1) = mx_1 + b$$

$$V(x_2) = mx_2 + b$$

que permiten determinar las dos incógnitas m y b .

• podemos especificar el valor de V y la pendiente en uno de los bordes \Rightarrow eso determina unívocamente la recta

• NO me serviría especificar la pendiente en ambos bordes ya que esto sería o bien redundante (si $V_1' = V_2'$) o bien contradictorio (si $V_1' \neq V_2'$).

Este ultimo punto muestra que, aún en ésta caso en el que está claro cuando unas condiciones de contorno son apropiadas, en principio puede no ser obvio y no cualquier condición me va a permitir encontrar la solución a la ec. de Laplace. En 2D y 3D esto será aún más complicado.

Muchas veces, cuando uno tiene una ecuación de derivadas parciales como es el caso de las. ecs. de Laplace, Poisson, y otras que ocurren en Física Teórica, no es posible encontrar una forma funcional general para la solución (como si conseguimos arriba en 1D). En esos casos, es útil encontrar al menos propiedades generales que satisfacen las soluciones de la ec. en cuestión.

Para la ecuación de Laplace, consideraremos dos propiedades claves de sus soluciones.

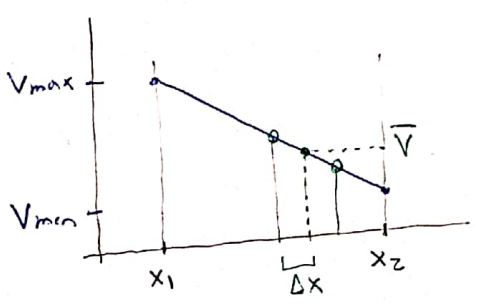
- La primera es que el valor de $V(x)$ en un punto dado es igual al promedio del valor de V en ~~xxx~~ dos puntos equidistantes:

$$V(x) = \frac{1}{2} (V(x+\Delta x) + V(x-\Delta x)) = \bar{V}$$

Esto es claro en 1D donde la solución es una recta $V(x)=mx+b$

- Como consecuencia, la solución no puede tener ni mínimos ni máximos locales. Es decir, los extremos ocurren en los bordes, nunca dentro del dominio en el que vale $\nabla^2 V = 0$.

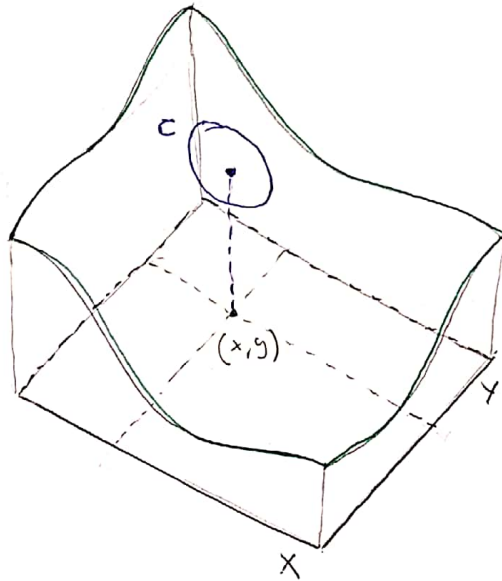
De nuevo esto es claro en 1D donde la solución es una recta:



• La ec. de Laplace en 2D:

$$(58.1) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

- No tenemos una forma cerrada para la solución, como en 1D.
- ¿Cuál sería una condición de contorno apropiada, que me permita determinar la solución de la ec. (58.1) ?



- la solución será una superficie $V(x, y)$
- el valor de la solución en un punto (x, y) es igual al promedio de los valores sobre un círculo C de radio R alrededor de (x, y) :

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \cdot \oint_C V(\mathbf{r}') \cdot dl' = \bar{V}$$

- la solución no admite extremos locales: los mínimos y máximos de $V(x, y)$ están sobre los bordes.

La ecuación de Laplace 3D.

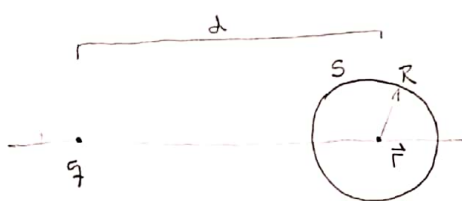
(S9.1) $\cdot \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$

• el valor de $V(\vec{r})$ es el promedio de los valores sobre una esfera concéntrica de radio R :

(S9.2) $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \oint_S V(\vec{r}') ds'$

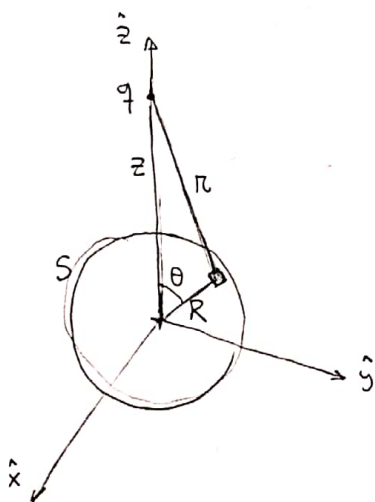
• $V(\vec{r})$ no tiene extremos; los extremos ocurren en los bordes (contornos) del dominio en el que está definida la ecuación.

* Para demostrar el Teorema del promedio ec. (S9.2), consideremos primero ob si, nuevamente, una carga puntual q . Descemos calcular el valor



promedio de $V(\vec{r})$ sobre una esfera S de radio R que se encuentra a cierta distancia d de la carga q .

Es conveniente elegir un sistema de coordenadas con el origen en el centro de la esfera y la carga q sobre el eje z :



El potencial debido a q sobre un punto de la esfera se puede escribir como:

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$ donde r es la distancia entre q y el punto considerado.

$r^2 = z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta$ (Teor. del coseno)

Para calcular el promedio, tenemos que integrar el potencial sobre la superficie de la esfera:

$\bar{V} = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \oint_S V(r) ds = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \cdot \underbrace{(z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta)^{-1/2}}_{1/r} \cdot \underbrace{R^2 \sin \theta d\theta d\phi}_{ds \text{ (esféricas)}}$

dividimos por el área de la esfera

$$(60.1) \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta (z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta)^{-1/2} = \int \frac{1}{2Rz} \cdot u^{-1/2} du = \frac{1}{2Rz} \cdot \frac{u^{1/2}}{(+1/2)} = \frac{1}{Rz} \sqrt{u} = *$$

$$u \equiv z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = +2Rz \sin \theta \rightarrow d\theta \sin \theta = \frac{1}{2Rz} \cdot du$$

$$* = \frac{1}{Rz} \cdot \sqrt{z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{Rz} \cdot \left(\sqrt{(z+R)^2} - \sqrt{(z-R)^2} \right) = **$$

Vamos a considerar que la carga q está fuera de la esfera, esto es $z-R > 0$, con lo cual:

$$(60.2) \quad ** = \frac{1}{Rz} \cdot \left((z+R) - (z-R) \right) = \frac{2}{z}$$

Entonces, volviendo a la expresión para \bar{V} con (60.1) y (60.2):

$$\bar{V} = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \cdot R^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{z}$$

$$(60.3) \quad \boxed{\bar{V} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{q}{z}}$$

Es decir que el promedio de $V(\vec{r})$ sobre la esfera es igual al valor del potencial en el centro de la misma, que es lo que queríamos probar.

Si tenemos una colección de cargas*, por el principio de superposición, tenemos el mismo resultado. $\rightarrow \otimes$ fuera de la esfera.

NOTA: (al margen) ¿Que sucede si el radio de la esfera es muy grande y la carga q queda dentro de la esfera? Para empezar, no vale Laplace en la esfera.

En este caso volvemos a (*) solo que ahora $z-R < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow * = \frac{1}{Rz} \cdot \left((z+R) - (R-z) \right) = \frac{1}{Rz} \cdot 2z = \frac{2}{R}$$

y resulta que $\bar{V} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$; si hay más de una carga

dentro de la esfera obtendremos $\boxed{\bar{V} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q_{enc}}{R}}$ (superposición).

En general, entonces, tendremos la suma de contribuciones (60.3) y (60.4).

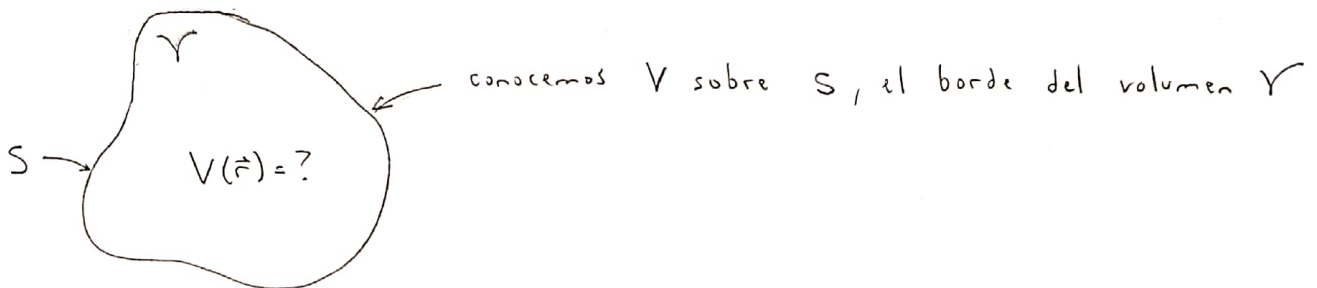
Condiciones de contorno para la ec. de Laplace 3D.

Queremos determinar cuáles son las condiciones de contorno apropiadas para poder resolver $\nabla^2 V = 0$ en un volumen.

Resulta que hay diferentes formas de proporcionarlas, y los teoremas de unicidad nos garantizan condiciones apropiadas.

* Teorema de unicidad para potenciales fijos:

Dado el valor de V en el borde $S = \partial\mathcal{V}$ de un volumen \mathcal{V} , la ecuación de Laplace tiene una única solución en \mathcal{V} .



Supongamos que existen dos soluciones de la ecuación de Laplace, V_1 y V_2 , que satisfacen la condición de contorno sobre S .

$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 V_2 = 0$$

$$V_1|_S = V_2|_S = \text{condición de contorno.}$$

Definimos la diferencia $V_3 = V_2 - V_1$, que también satisface la ec. de Laplace:

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 (V_2 - V_1) = \nabla^2 V_2 - \nabla^2 V_1 = 0 - 0 = 0.$$

En los bordes, V_3 es nula, ya que $V_1 = V_2$ allí y $V_3 = V_2 - V_1$.

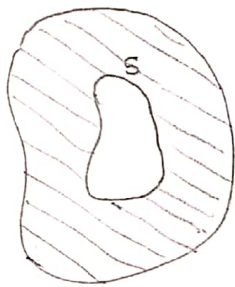
$$\therefore V_3|_S \equiv 0.$$

Recordemos que la ecuación de Laplace no admite extremos en \mathcal{V} . Estos ocurren solo en el borde S . Luego, el máximo y el mínimo de V_3 son ambos cero, ya que $V_3 \equiv 0$ en S .

$$\therefore V_3 \equiv 0 \text{ en todo } \mathcal{V} \quad \text{y} \quad \boxed{V_2 \equiv V_1}$$

Es decir que la solución es única.

Aplicación del Teorema de unicidad: campo en una cavidad vacía.



Supongamos que dentro de un conductor hay una cavidad sin carga.

En el borde de la cavidad, el potencial es constante, digamos $V|_S \equiv V_0$.

Dentro de la cavidad el potencial satisface $\nabla^2 V = 0$.

Una posible solución al problema es $V(\vec{r}) \equiv V_0$ en toda la cavidad (y sus bordes). El teorema de unicidad nos dice entonces que esta ES la solución al problema: $V \equiv V_0$ en la cavidad y $\vec{E} = -\nabla V = \vec{0}$.

Unicidad en presencia de cargas:

Supongamos que el volumen V del teorema, en vez de vacío contiene una densidad de carga. Entonces el potencial obedece la ec. de

$$\text{Poisson allí: } \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Si ahora suponemos que existen dos soluciones V_1 y V_2

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{con} \quad V_1|_S = V_2|_S$$

La diferencia $V_3 = V_2 - V_1$, satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_2 - \nabla^2 V_1 = 0.$$

Además $V_3|_S = 0$ en los bordes.

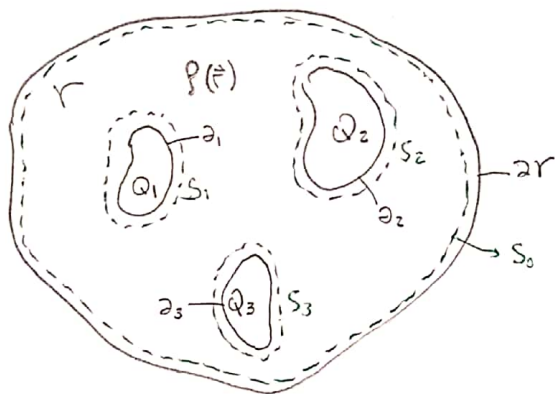
De nuevo concluimos $V_3 \equiv 0$ en todo el volumen V .

(62-1) \therefore Teorema: el potencial $V(\vec{r})$ dentro de un volumen V está unívocamente determinado si se especifican la densidad de carga $\rho(\vec{r})$ en V y el valor de $V(\vec{r})$ en todos los bordes de V , $V(\vec{r})|_{\partial V}$.

• obs: es posible dar condiciones de contorno de otras formas, que son relevantes para problemas tanto prácticos como teóricos.

Teorema de unicidad para conductores con cargas fijas.

¿Que sucede si tenemos una configuración con varios conductores cargados y conocemos sus cargas Q_i ? ¿Queda determinada una única solución para el campo eléctrico?



En el volumen V de borde ∂_0 hay una densidad de carga conocida $\rho(\vec{r})$ y varios conductores con cargas Q_i y bordes ∂_i . Si bien conocemos las cargas Q_i , no sabemos como se distribuyen en las superficies ni cual es el valor de los potenciales.

Supongamos por un momento que existen dos soluciones para el campo, \vec{E}_1 y \vec{E}_2 , que satisfacen las condiciones del problema. La ley de Gauss vale en ambos casos, en sus formas diferencial e integral:

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \oint_{S_i} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \forall S_i, Q_i$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \oint_{S_i} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \forall S_i, Q_i$$

En el borde externo de la configuración, ∂R , También

$$\oint_{\partial R} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad \oint_{\partial R} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0}$$

Introducimos el campo diferencia $\vec{E}_3 = \vec{E}_2 - \vec{E}_1$:

$$\nabla \cdot \vec{E}_3 = \nabla \cdot \vec{E}_2 - \nabla \cdot \vec{E}_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \therefore \nabla \cdot \vec{E}_3 = 0$$

$$\oint_{S_i} \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall S_i$$

Si bien no sabemos de que manera se distribuyen las cargas Q_i en la superficie de cada conductor ∂i , si sabemos que los conductores son equipotenciales. Los valores V_1 y V_2 pueden diferir, en principio, pero V_3 será constante en las superficies de cada conductor.

Recordamos ahora que la derivada (divergencia) del producto

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (V_3 \vec{E}_3) &= V_3 \nabla \cdot \vec{E}_3 + \vec{E}_3 \cdot \nabla V_3 \\ &= V_3 \cdot 0 + \vec{E}_3 \cdot (-\vec{E}_3) = -E_3^2 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E}_3 = 0 \\ \vec{E}_3 = -\nabla V_3 \end{array} \right.$$

$$\therefore \nabla \cdot (V_3 \vec{E}_3) = -E_3^2$$

Integrando en todo el volumen y aplicando el teorema de la divergencia

$$\int_V \nabla \cdot (V_3 \vec{E}_3) dV = \oint_S V_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = - \int_V E_3^2 dV$$

La integral de superficie abarca todos los bordes de V , y V_3 es constante en estos bordes, con lo cual puede salir de la integral:

$$+ \int_V E_3^2 dV = - V_3 \underbrace{\oint_S \vec{E}_3 \cdot d\vec{S}}_{=0} = - V_3 \cdot \phi \equiv 0.$$

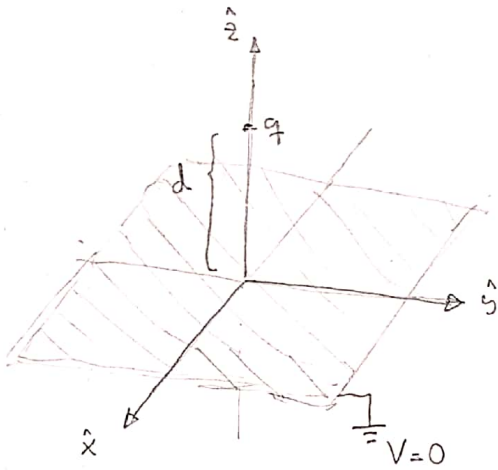
$$\therefore \int_V E_3^2 dV \equiv 0$$

Como el integrando $E_3^2 > 0$ es definido positivo, para que la integral sea nula debe ser $E_3 \equiv 0 \quad \forall \vec{r}$, con lo cual:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

y la solución es única.

- * Podemos entonces formular el Teorema: dado un volumen V bordeado por superficies de conductores y con una densidad de carga ρ conocida, el campo eléctrico está definido unívocamente si se especifican las cargas Q_i en cada conductor.



En el plano XY ($z=0$) hay una placa conductora infinita, conectada a Tierra, es decir $V=0$. A cierta distancia d de la placa, sobre el eje \hat{z} hay una carga puntual q .

¿Cuáles es el potencial $V(\vec{r})$ en la región superior de la placa, es decir para $z > 0$?

Es un problema complicado. Conocemos la carga q y su posición. El conductor infinito en $z=0$ tiene potencial fijo $V=0$, y esto nos da una condición de contorno válida para resolver la ecuación de Poisson $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ en el espacio $z > 0$, con $\rho(\vec{r}) = q \delta(z-d)$.

- El problema aquí es que, como sucede cuando tenemos conductores, desconocemos a priori de que manera se va a distribuir la carga superficial inducida en el conductor debido a la presencia de q .

(65.1) - Formalmente, queremos resolver la ecuación de Poisson para $z > 0$ con una carga puntual q en $(0,0,d)$ y con condiciones de contorno

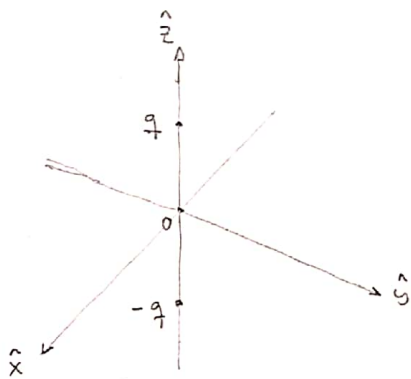
$$\begin{cases} V = 0 & \text{para } z = 0 \\ V \rightarrow 0 & \text{lejos de la carga: } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2 \end{cases}$$

Por el Teorema (62.1) sabemos que existe una única solución a este problema.

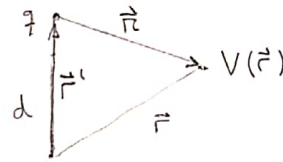
Si llegáramos a encontrar una función $V(\vec{r})$ que satisfaga estas condiciones... tendríamos la solución.

Acá viene el galerago, que constituye la lógica del método de imágenes: 66

Olvídense del plano conductor. Vamos a resolver otro problema:



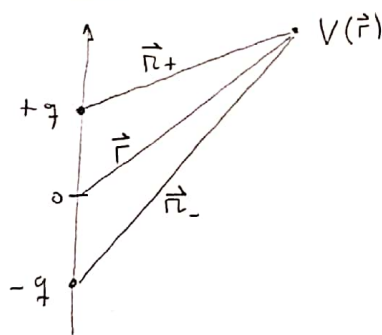
consideremos dos cargas puntuales q y $-q$, ubicadas sobre el eje z a distancias $\pm d$ del origen.



Por superposición de dos cargas puntuales, tenemos:

$$(66.1) \quad V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right)$$

NOTA:



$$\vec{r}_+ = d \hat{z}$$

$$\vec{r}_- = -d \hat{z}$$

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

$$\vec{r}_\pm = \vec{r} - \vec{r}_\pm = \vec{r} \mp d \hat{z} = x \hat{x} + y \hat{y} + (z \mp d) \hat{z}$$

$$r_\pm = |\vec{r}_\pm| = (x^2 + y^2 + (z \mp d)^2)^{1/2}$$

Este potencial satisface las condiciones de contorno:

$$V = 0 \quad \text{para } z=0$$

$$V \rightarrow 0 \quad \text{para } r \gg d$$

Además, la única carga presente en la región $z > 0$ es la carga puntual q en $d \hat{z}$.

Estas son las condiciones del problema original (65.1)!

Luego, (66.1) es la solución al problema de una carga puntual frente a un plano conductor conectado a Tierra, en $z \geq 0$.

OJO: para $z < 0$ el problema es diferente, ya que allí agregamos una carga $(-q)$ que no estaba. Pero eso no importa si lo que nos interesa es la región $z > 0$.

Obs: el argumento se basa fuertemente en el Teorema de unicidad.

obs: la lógica del método de imágenes. es encontrar una configuración más sencilla que genere las mismas condiciones en el volumen y superficie deseados. Pero también podemos invertir esta lógica: si sabemos resolver cierto problema, digamos con varias cargas puntuales, que por superposición resulta sencillo, y encontramos las superficies equipotenciales de ese problema (esto último es un problema de geometría) entonces sabremos resolver el problema en el que se ubica un conductor con la forma de esa equipotencial y se lo conecta a una batería con el potencial determinado ... y se eliminan las cargas que quedan "dentro" del conductor.

obs: resolvimos el problema (65.1) y encontramos $V(\vec{r})$ para $z \geq 0$ sin saber aún de que manera se inducen cargas en la placa conductora!

Cargas inducidas:

Si recuerdan la clase pasada, en aquella ocasión vimos que en un conductor la densidad de carga superficial σ estaba relacionada con la derivada normal del potencial, ec. (51.4), y con el campo superficial. (51.3).

En aquel momento era raro escribir una ec. para σ conociendo V :

$$\sigma = - \epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_S$$

pero ahora es claro su utilidad! Hemos obtenido $V(\vec{r})$ sin conocer σ , ahora podemos calcularla.

En el caso del plano conductor de nuestro problema, la dirección normal está en \hat{z} . Luego

$$\sigma = - \epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0}$$

Derivando la expresión para el potencial (66.1):

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{z} (x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{-3/2} \cdot z(z-d) - \frac{(-1)}{z} (x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{-3/2} \cdot z(z+d) \right)$$

evaluando la derivada en $z=0$,

$$\sigma(x, y) = \frac{q}{4\pi} \left(-d (x^2 + y^2 + d^2)^{-3/2} - d (x^2 + y^2 + d^2)^{-3/2} \right)$$

$$\boxed{\sigma(x, y) = -\frac{q d}{2\pi} (x^2 + y^2 + d^2)^{-3/2}}$$

obs: la densidad de carga inducida es de signo opuesto a q .
Es máxima en $x=y=0$, la distancia mas cercana a q .
Desde allí decae.

¿Cual será la carga inducida Total en la superficie del conductor?

$$Q_{TOT} = \int_S \sigma ds = ?$$

en coordenadas polares, $\sigma(r, \theta) = -\frac{q d}{2\pi} (r^2 + d^2)^{-3/2}$

$$Q_{TOT} = \iint_S \sigma(r, \theta) dr r d\theta = -\frac{q d}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\infty} dr r (d^2 + r^2)^{-3/2}$$

$$Q_{TOT} = -q d \cdot \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$u = r^2 + d^2 \rightarrow du = 2r dr$$

$$= -q d \int \frac{1}{2} \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2} q d \cdot \int du u^{-3/2} = -\frac{1}{2} q d \left[\frac{u^{-1/2}}{-1/2} \right]$$

$$= q d \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \Big|_0^{\infty} = q d \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} \Big|_0^{\infty} = q d \left(0 - \frac{1}{d} \right) = -q$$

$$\therefore \boxed{Q_{TOT} = -q}$$

Cuando presentamos los conductores y analizamos sus propiedades electrostáticas, vimos que un conductor neutro podía experimentar una fuerza en presencia de otras cargas o campos, debido a la inducción y redistribución de las cargas libres - p.46 y p.53
Las cargas inducidas a su vez generan una fuerza sobre la carga puntual q .

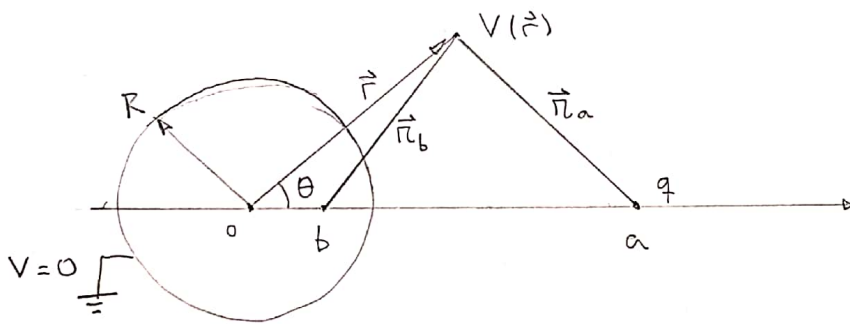
Acá podemos explotar nuevamente la solución del problema con

la carga imagen. Vimos que en la vecindad de q el potencial está dado por (66-1), que es el de la carga q con su imagen $(-q)$. Si el potencial es el mismo, el campo eléctrico, que es su gradiente $\vec{E} = -\nabla V$, También. Y por lo tanto también la fuerza sobre q !

$$\therefore \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(2d)^2} (-)\hat{z} \quad \text{es la fuerza sobre } q.$$

OJO: la energía No es la misma para el problema imagen. Resulta que en este caso la energía del problema imagen es el doble que la del problema original. ¿Por qué? Piénsalo.

La clase pasada consideramos, cualitativamente, el problema de una carga puntual ubicada frente a una esfera conductora. En este caso supondremos que el conductor está conectado a Tierra de modo que $V=0$. Podemos calcular el potencial en todo el espacio exterior a la esfera? ¿Cuál será la densidad de carga inducida sobre la esfera? ¿Y la fuerza que la esfera produce sobre la carga puntual? Esto y mucho más, podemos calcular mediante el método de imágenes.



• Esfera conductora a $V=0$ de radio R . Una carga puntual q está a una distancia a del centro de la esfera.

• Vamos a olvidarnos de la esfera conductora y buscaremos generar unas condiciones equivalentes introduciendo una carga puntual q' a una distancia b del centro de la esfera.

$$(70.1) \begin{cases} q' = \alpha q \\ b = \beta a \end{cases}$$

$$(70.2) \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r_a} + \frac{q'}{r_b} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{\alpha}{r_b} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{potencial de} \\ \text{las dos cargas} \\ \text{puntuales } q, q' \end{array} \right.$$

$$(70.3) \quad \begin{cases} r_a^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta \\ r_b^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{por teor. del coseno.} \end{array} \right.$$

El potencial puede escribirse como:

$$(70.4) \quad V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} + \frac{\alpha}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} \right]$$

La pregunta es, ¿Puedo elegir α y β de modo que $V(R, \theta) \equiv 0$?

Lo que haremos es imponer $V(R, \theta) \equiv 0$ y ver si podemos determinar valores de α y β que sean consistentes con esta condición.

Vemos que para que esto ocurra el corchete debe anularse y debe ser $\alpha < 0$; la condición es; con $r \equiv R$:

(71.1) ser $\alpha < 0$; la condición es; con $r \equiv R$:

* $\alpha \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta} = -\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb \cos \theta} \quad \forall \theta$

Elevamos al cuadrado e introducimos $b = \beta a$:

(71.2) $\alpha^2 (R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta) = (R^2 + \beta^2 a^2 - 2R\beta a \cos \theta)$

Esta relación debe valer para Todo θ . En particular, podemos fijar dos valores de θ para obtener dos ecuaciones independientes que nos permitan despejar las dos incógnitas α y β :

$\theta = \frac{\pi}{2}$: $\alpha^2 (R^2 + a^2) = R^2 + \beta^2 a^2$

(71.3) $\Rightarrow \boxed{\beta^2 = \alpha^2 \left[1 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 \right] - \left(\frac{R}{a}\right)^2}$

$\theta = 0$: $\alpha^2 (R^2 + a^2 - 2Ra) = (R^2 + \beta^2 a^2 - 2R\beta a)$

$\therefore \alpha^2 (a - R)^2 = (R - \beta a)^2$

recordamos que:

$|\alpha| (a - R) = R - \beta a$

$\begin{cases} a > R \\ R > b = \beta a \end{cases}$

$-\alpha (a - R) = R - \beta a$

$\alpha < 0 \Rightarrow |\alpha| = -\alpha$

$\beta a = R + \alpha (a - R)$

(71.4) $\boxed{\beta = \frac{R}{a} + \alpha \left(1 - \frac{R}{a} \right)}$

De estas dos relaciones, (71.3) y (71.4), sacamos una cuadrática en α

Introduciendo la notación $\lambda \equiv R/a$

$\beta^2 = \alpha^2 (1 + \lambda^2) - \lambda^2 = (\lambda + \alpha (1 - \lambda))^2 = \lambda^2 + 2\alpha \lambda (1 - \lambda) + \alpha^2 (1 - \lambda)^2$

~~$\alpha^2 + \alpha^2 \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2 + 2\alpha \lambda - 2\alpha \lambda^2 + \alpha^2 + \alpha^2 \lambda^2 - 2\alpha^2 \lambda$~~

~~$0 = 2\lambda^2 + 2\lambda\alpha - 2\lambda^2\alpha - 2\alpha^2\lambda$~~

$$0 = \lambda + \alpha(1-\lambda) - \alpha^2$$

$$\alpha^2 - (1-\lambda)\alpha - \lambda = 0$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{(1-\lambda) \pm \sqrt{(1-\lambda)^2 - 4(-)\lambda}}{2}$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 1-\lambda \pm \sqrt{1-2\lambda+\lambda^2+4\lambda} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1-\lambda \pm \sqrt{(1+\lambda)^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (1-\lambda) \pm (1+\lambda) \right\}$$

$\alpha_+ = 1$; no nos sirve porque $\alpha < 0$.

$\alpha_- = \frac{1}{2}(-2\lambda) = -\lambda = -\frac{R}{a} < 0$ es un valor posible

$$(72.1) \quad \boxed{\alpha = -\frac{R}{a}}$$

$$\beta = \lambda + \alpha(1-\lambda) = \lambda - \lambda(1-\lambda) = \lambda - \lambda + \lambda^2 = \lambda^2 = \left(\frac{R}{a}\right)^2$$

$$(72.2) \quad \boxed{\beta = \left(\frac{R}{a}\right)^2}$$

Hemos encontrado valores de q' y de b

$$(72.3) \quad \boxed{q' = -\frac{R}{a} \cdot q}$$

$$\boxed{b = \left(\frac{R}{a}\right)^2 \cdot a}$$

Para los que $V(R, \theta) \equiv 0 \quad \forall \theta$.

Con esta carga q' así ubicada, el problema imagen es equivalente al de la esfera conductora conectada a Tierra en la región del espacio exterior a la esfera. Por lo tanto el potencial es la solución:

(72.4)

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{R}r\right)^2 + R^2 - 2ar\cos\theta}} \right]$$

Ahora que conocemos el potencial, podemos calcular la densidad superficial de carga inducida en la esfera $\sigma(\theta)$:

$$(73.1) \quad \sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}, \text{ en este caso } \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

Derivando la expresión para el potencial ec. (72.4):

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ (-1)^{\frac{1}{2}} (r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{-3/2} \cdot (\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}a \cos \theta) + \right. \\ \left. - (-1)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{a}{R}\right)^2 + R^2 - 2aR \cos \theta \right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} \cdot r - \frac{1}{2} a \cos \theta \right) \right\}$$

La evaluamos en $r = R$:

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi} \left\{ - (R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{-3/2} \cdot (R - a \cos \theta) \right. \\ \left. + (R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{-3/2} \cdot \left(\frac{a^2}{R} - a \cos \theta \right) \right\}$$

$$\sigma(\theta) = \frac{-q}{4\pi} (R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{-3/2} \cdot \left\{ \frac{a^2}{R} - a \cos \theta - R + a \cos \theta \right\}$$

$$\boxed{\sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi R} \cdot (a^2 - R^2) \cdot (R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{-3/2}}$$

Integrando sobre la esfera se puede demostrar que la carga total inducida es $Q_{TOT} = -\frac{R}{a} \cdot q = \dots q'!$

Finalmente, podemos obtener la fuerza sobre la carga q .

Es la misma que ejercería una carga $q' = -\frac{R}{a} q$ a una distancia $b = \left(\frac{R}{a}\right)^2 a$ del origen, es decir una distancia

$$d = a - b = a - \left(\frac{R}{a}\right)^2 a = \left(1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2\right) a \text{ de la carga } q:$$

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q q'}{d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \cdot \left(-\frac{R}{a}\right) \cdot q \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2\right]^2 \cdot a^2}$$

$$\boxed{F = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R a q^2}{(a^2 - R^2)^2}}$$