

En lo que concierne a sus propiedades eléctricas, en esta materia consideraremos dos tipos de materiales: conductores y aisladores.

* Los conductores, como vimos, son materiales compuestos por átomos que tienen uno o más portadores de carga libres. Esto quiere decir que los portadores de carga, electrones en el caso de los metales, pueden desplazarse de un lado a otro del conductor, moviéndose distancias macroscópicas de sus átomos de origen.

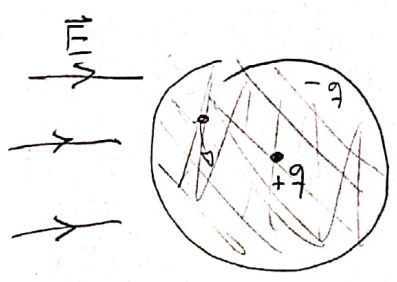
* En los aisladores, por el contrario, los portadores de carga sólo pueden moverse a distancias pequeñas de los átomos o moléculas a los que pertenecen. Es decir, si bien no se encuentran completamente fijos, sus desplazamientos están confinados a las cercanías del átomo o molécula correspondiente.

* Si bien uno podría pensar que en consecuencia los aisladores son eléctricamente inertes, esto NO es así. Como vamos a ver en las próximas dos clases, los aisladores —también llamados dieléctricos— tienen interesantes propiedades y pueden reaccionar de maneras complejas a la presencia de cargas y campos.

Vamos a considerar dos posibles mecanismos que dan lugar a una interacción de materiales dieléctricos con campos externos.

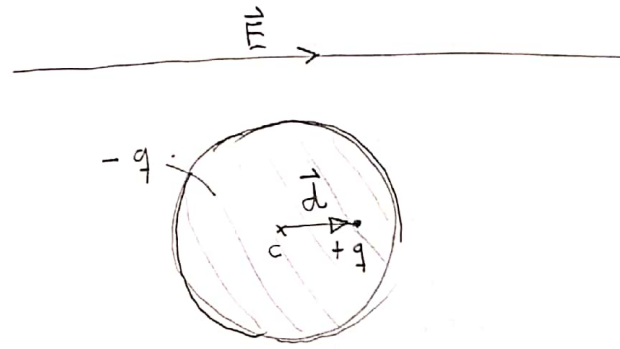
* Dipolos inducidos:

¿Que sucede si colocamos un átomo neutro en un campo eléctrico externo y uniforme?



La carga neta del átomo es nula; la carga $+q$ de su núcleo está balanceada por su nube de electrones de carga $-q$. Podríamos pensar que el campo no lo afecta...?

Sin embargo, la fuerza que ejerce el campo tiene sentidos opuestos sobre el núcleo y sobre los electrones:



El núcleo se desplazará en la dirección de \vec{E} y la nube de electrones en la dirección contraria.

Si el campo no es demasiado intenso se alcanzará un equilibrio cuando la fuerza entre el núcleo y la nube desplazada de atracción

balancea la que ejerce el campo externo.

El resultado es que el átomo tiene ahora un pequeño momento dipolar \vec{p} : se ha convertido en un dipolo, o está polarizado.

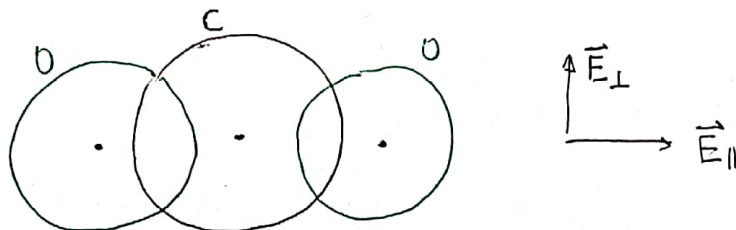
En muchos materiales existe una relación lineal entre este

momento dipolar inducido \vec{p} y el campo \vec{E} que lo induce:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}$$

α se llama polarizabilidad atómica.

Muchas veces sin embargo las moléculas no tienen la simetría esférica del problema que describimos arriba. Por ejemplo si consideramos la molécula de CO_2 :



Resulta que se polariza de manera diferente si el campo está en la dirección \vec{E}_\perp que si está en \vec{E}_\parallel :

$$\vec{p}_\parallel = \alpha_\parallel \vec{E}_\parallel \quad \text{y} \quad \vec{p}_\perp = \alpha_\perp \vec{E}_\perp$$

En general, si el campo \vec{E} no está en ninguna de estas

direcciones, lo podemos descomponer, y la polarización es

$$\vec{P} = \alpha_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} + \alpha_{\perp} \vec{E}_{\perp}$$

con lo que en general, \vec{P} puede no estar alineado con el campo eléctrico que lo produce!

Más en general, si una molécula no tiene simetrías

$$\vec{P} = \underline{\underline{A}} \vec{E} \quad \text{donde } \underline{\underline{A}} = [\alpha_{ij}] \text{ es el Tensor de polarizabilidad}$$

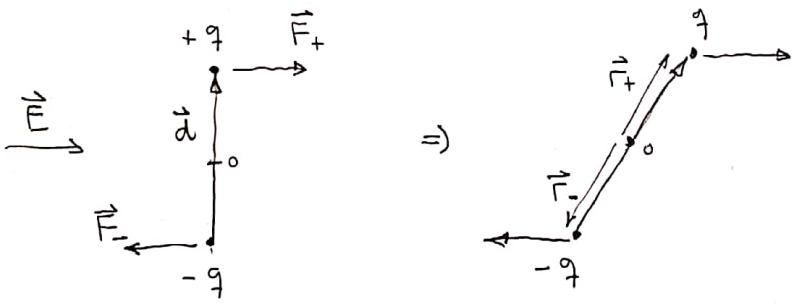
Dijimos que vamos a considerar dos mecanismos. El primero es la inducción de polar. Pero hay moléculas que ya son, naturalmente polares. En este caso tenemos:

* Alineación de moléculas polares: Torque y fuerza sobre dipolos.

¿Que sucede cuando colocamos una molécula polar, por ejemplo H_2O , en un campo eléctrico externo uniforme?

Una molécula polar tiene un momento dipolar \vec{p} (fijo).

Consideremos un dipolo físico formado por dos cargas $\pm q$ separadas por un vector \vec{d} de modo que su momento dipolar es $\vec{P} = q \vec{d}$:



las fuerzas \vec{F}_+ y \vec{F}_- tienen la misma magnitud pero apuntan en sentidos contrarios:

$$\vec{F}_{\pm} = \pm q \vec{E}$$

Luego aparece un Torque $\vec{\tau}$ sobre el dipolo que tiende a alinearlo con el campo \vec{E} :

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \frac{1}{2} \vec{d} \times q \vec{E} + (-\frac{1}{2} \vec{d} \times (-q) \vec{E}) = q \vec{d} \times \vec{E}$$

$$\vec{\tau} = q \vec{d} \times \vec{E}$$

o introduciendo el momento dipolar $\vec{p} = q \vec{d}$

$$(93.1) \quad \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

En resumen, una molécula polar libre de rotar va a girar hasta alinearse con el campo externo.

* Si el campo \vec{E} no es uniforme, $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$, además de un Torque puede generar una fuerza sobre el dipolo. ¿Cómo? Si \vec{E} depende de \vec{r} el valor del campo puede ser diferente en la posición de ambas cargas - con lo que $\vec{F}_+ \neq \vec{F}_-$:

$$(93.2) \quad \vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q \vec{E}_+ - q \vec{E}_- = q (\vec{E}_+ - \vec{E}_-)$$

Si introducimos $\Delta \vec{E} = \vec{E}_+ - \vec{E}_-$,

$$(93.3) \quad \Delta \vec{E} = \Delta E_x(x, y, z) \hat{x} + \Delta E_y(x, y, z) \hat{y} + \Delta E_z(x, y, z) \hat{z}$$

Suponiendo que el dipolo es pequeño, es decir que la distancia $d = |\vec{d}|$ entre las cargas es pequeña, podemos escribir para cada componente: $E_x(x, y, z)$, E_y , E_z ,

$$(93.4) \quad \Delta E_x \sim d E_x = \nabla E_x \cdot \vec{d}$$

$$(93.5) \quad \text{con } \nabla E_x = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) E_x(x, y, z)$$

$$(93.6) \quad d E_x = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (d_x \hat{x} + d_y \hat{y} + d_z \hat{z})$$

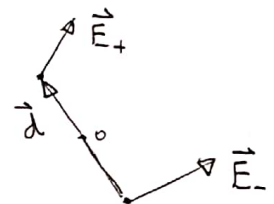
$$= d_x \frac{\partial}{\partial x} E_x + d_y \frac{\partial}{\partial y} E_x + d_z \frac{\partial}{\partial z} E_x$$

$$(93.7) \quad d E_x = (\vec{d} \cdot \nabla) E_x$$

Reuniendo las otras componentes (93.3):

$$(93.8) \quad \Delta \vec{E} = (\vec{d} \cdot \nabla) E_x \hat{x} + (\vec{d} \cdot \nabla) E_y \hat{y} + (\vec{d} \cdot \nabla) E_z \hat{z}$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} = (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E}}$$



Fíjense que el operador $(\vec{d} \cdot \nabla)$ proyecta la derivada en la dirección de \vec{d} .

De modo que la fuerza sobre un dipolo en un campo no uniforme será:

(94.1)
$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$$

OJO: al derivar (93.1) calculamos el Torque con respecto al centro del dipolo. Si no, $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} + \vec{r} \times \vec{F}$.

Polarización de un material dieléctrico.

Volviendo a los dieléctricos... Hemos visto los efectos que un campo eléctrico puede tener sobre átomos y moléculas: generando dipolos inducidos o produciendo la alineación de dipolos permanentes en la dirección del campo.

Si colocamos una porción de material dieléctrico en un campo externo \vec{E} , ¿qué sucede?

- Si está hecho de átomos neutros o moléculas no-polares, se inducirán dipolos alineados con el campo en todo el material.
- Si está hecho de moléculas polares, estas se alinearán con el campo externo.

En ambos casos, tendremos una multitud de pequeños dipolos alineados con el campo. Diremos que el dieléctrico está polarizado.

Podemos definir una cantidad macroscópica, la densidad de polarización o momento dipolar por unidad de volumen, \vec{P} .

Llamaremos a \vec{P} simplemente polarización del material.

Por un rato, ^{Por ahora} vamos a olvidar de como se produce esta polarización, y vamos a estudiar los campos eléctricos producidos por un cuerpo polarizado con polarización \vec{P} .

Tenemos un cuerpo de material dieléctrico polarizado — no importa cómo. El cuerpo consiste de pequeños dipolos distribuidos en su volumen dando como resultado una polarización \vec{P} .

Algún tiempo atrás... calculamos tanto el potencial como el campo debidos a un dipolo \vec{p} (recordamos las ecs. 31.5 y 34.4)

$$(95.1) \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

$$(95.2) \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p})$$

Podemos entonces particionar el volumen del cuerpo en pequeños volúmenes con momento dipolar $\vec{p}(\vec{r}') d\tau'$ e integrar sus contribuciones al campo. Bueno, más sencillo será calcular el potencial

$$(95.3) \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \cdot \vec{p}(\vec{r}') \cdot \hat{r} d\tau'$$

Listo, esto es lo que buscábamos. Aunque puede ser complicado evaluar la integral, en principio esto resuelve nuestro problema.

... Ahora vamos a ver que esta expresión se puede reescribir de una manera astuta que nos va a dar una intuición más clara de lo que está ocurriendo.

Todo viene de una forma alternativa de escribir $\frac{\hat{r}}{r^2}$...

∇' , es un galerazo, pero uno que ya hemos visto antes!

$$(95.4) \quad \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

donde el gradiente deriva con respecto a \vec{r}' ; recordemos que

$$(95.5) \quad \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}' = (x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}$$

$$(95.6) \quad r = |\vec{r}| = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$$

$$(95.7) \quad \nabla' = \frac{\partial}{\partial x'}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y'}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z'}\hat{z}$$

$$\begin{aligned} \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x'} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y'} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z'} \hat{z} \right) \cdot \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-1/2} \\ &= (-) \frac{1}{2} []^{-3/2} \cdot 2(x-x') (-) \hat{x} + (-) \frac{1}{2} []^{-3/2} \cdot 2(y-y') (-) \hat{y} \\ &\quad + (-) \frac{1}{2} []^{-3/2} \cdot 2(z-z') (-) \hat{z} \\ &= (+) []^{-3/2} \left((x-x') \hat{x} + (y-y') \hat{y} + (z-z') \hat{z} \right) \\ &= (+) []^{-3/2} \cdot \vec{r} = + \frac{\vec{r}}{[]^{3/2}} = - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = - \frac{\hat{r}}{r^2} \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado (95.4).

Volviendo a la expresión del potencial (95.3), podemos reemplazar usando (95.4):

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) d\omega'$$

Esta integral la podemos reescribir integrando por partes:

Recordamos que la divergencia de un producto entre un campo escalar y otro vectorial es

$$\nabla \cdot (s \cdot \vec{v}) = \nabla s \cdot \vec{v} + s (\nabla \cdot \vec{v})$$

$$\Rightarrow \nabla' \cdot \left(\frac{1}{r} \vec{P} \right) = \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{P} + \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \vec{P})$$

Luego,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \nabla' \cdot \left(\frac{1}{r} \vec{P} \right) d\omega' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \vec{P}) d\omega'$$

Usando el teorema de la divergencia en el primer término

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r} (\vec{P} \cdot d\vec{S}') - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \vec{P}) d\omega'$$

Aún no lo parece, pero esta expresión para el potencial es muy interesante...

Vamos a definir una densidad superficial de cargas de polarización:

(97.1) $\sigma_p \equiv \vec{P} \cdot \hat{n}$

y una densidad volumétrica de cargas de polarización

(97.2) $\rho_p \equiv -\nabla \cdot \vec{P}$

De este modo, el potencial del cuerpo polarizado será

(97.3) $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p}{r} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p}{r} d\tau'$

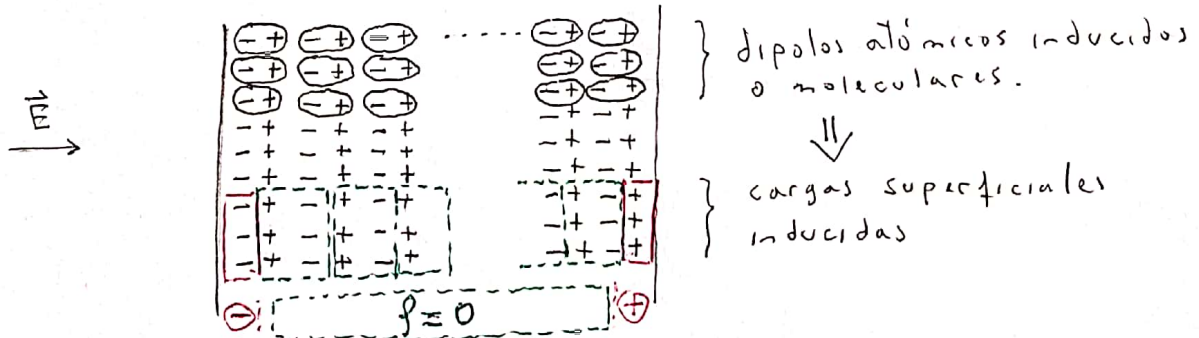
Bueno, suficientes cuentas por ahora, que quiere decir (97.3)?

El potencial de un cuerpo con una polarización $\vec{P}(\vec{r})$ está dado por distribuciones de carga ρ_p y σ_p , $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ y $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$.

Llamaremos cargas de polarización a estas densidades, por eso el subíndice "p", aunque también se las llama cargas "ligadas" para diferenciarlas de las cargas "libres" que ocurren en un conductor.

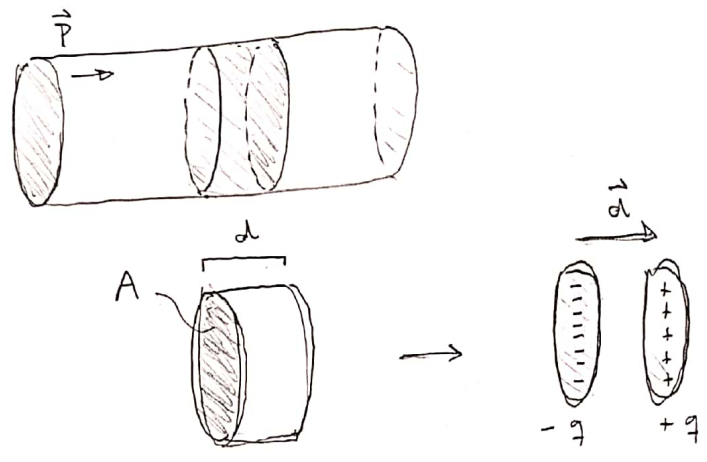
Resumiendo: en vez de integrar directamente la ec. (95.3), podríamos primero obtener las cargas de polarización (97.1) y (97.2) ... fácil: un producto escalar y una divergencia ... y luego evaluar (97.3) usando todos los cañones que ya hemos aprendido a usar para resolver estos problemas (Gauss y demás)

Ahora, todo bien con estas cargas de polarización, pero ¿que son? ¿existen? Si! Examinemos que ocurre en un dieléctrico plano:



Origen físico de las cargas de polarización

Consideremos un tubo a lo largo de un material que tiene una polarización \vec{P} .



Si aislamos una rodaja cilíndrica de área A y longitud d el momento dipolar de la rodaja, cuyo volumen es Ad , será

$$P_{rod} = PA d.$$

También podemos pensar en la rodaja como un dipolo físico formado por cargas $\pm q$ distribuidas en discos de área A y separados por una distancia d ; su momento dipolar

$$P_{rod} = q d$$

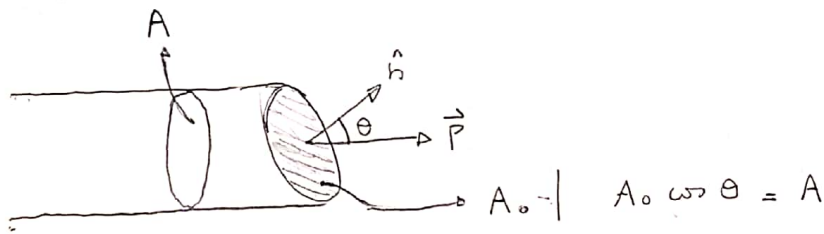
Iguando estas expresiones vemos que

$$q = PA$$

es la carga inducida en los discos que son las tapas de la rodaja. La densidad superficial de carga de polarización sera

$$\sigma_p = \frac{q}{A} = P$$

Ahora, si consideramos que el extremo del cilindro tiene un corte oblicuo, con una normal \hat{n} formando un ángulo θ con el eje del cilindro (y con \vec{P}),



$$\sigma_p = \frac{q}{A_0} = \frac{q}{A} \cdot \cos \theta = P \cos \theta = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

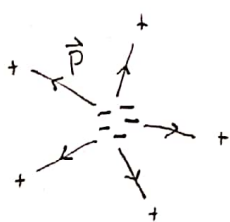
$$\boxed{\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}}$$

Este es el mismo resultado que obtuvimos más temprano en la ec. (97.1). Antes lo obtuvimos reescribiendo astutamente la expresión para el potencial. Ahora vemos el origen físico de estas cargas de polarización superficiales.

El efecto de la polarización \vec{P} es generar en la superficie del cuerpo un desplazamiento local de cargas que da lugar a un excedente \Rightarrow una distribución $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$.

¿Que hay de la densidad de cargas de polarización en volumen, ρ_p ?

Cuando la polarización \vec{P} no es uniforme en el cuerpo, se podrán producir acumulaciones internas de carga.



como en este ejemplo de un \vec{P} divergente.

La carga de polarización ρ_p tiene que compensar la carga que se haya acumulado en la superficie

$$\int_V \rho_p dV = - \oint_S \sigma_p ds = - \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} ds = - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

Por el teorema de la divergencia, debe ser $\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{P}) dV$

$$\int_V \rho_p dV = - \int_V (\nabla \cdot \vec{P}) dV \quad \text{para cualquier volumen}$$

$$\therefore \boxed{\rho_p = - \nabla \cdot \vec{P}} \quad \text{que ya habíamos obtenido en (97.2)}$$