Repaso Polarización en dieléctricos.

. Si tenemos un material dieléctrico con polarización $\vec{P}$:
hay una densidad de cargas de polarización

(100.1) $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$ en la superficie del dieléctrico

(100.2) $\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P}$ en el cuerpo (volumen) del dieléctrico

El potencial generado por estas cargas será

(100.3) $$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_P}{\imath}\,ds' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_P}{\imath}\,dv'$$

Desplazamiento eléctrico y Ley de Gauss en dieléctricos.

¿Que sucede si además del dieléctrico polarizado con $\vec{P}$ tenemos otras cargas presentes? Pueden ser portadores en un conductor o cargas empotradas fijas dentro del mismo dielectrico.

Llamaremos ρ_ℓ a estas otras cargas que no son de polarización. (ℓ por "libres"; la terminología no es del todo feliz porque "libres" puede describir los portadores en un conductor pero ~~tamb~~ también representan cargas fijas en dielectricos).

La carga total presente será dada por la densidad

(100.4) $$\rho = \rho_\ell + \rho_p$$

La ley de Gauss

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot(\rho_\ell + \rho_p) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_\ell - \nabla\cdot\vec{P}\right)$$

$$\therefore \quad \varepsilon_0\,\nabla\cdot\vec{E} = \rho_\ell - \nabla\cdot\vec{P}$$

(100.5) $$\nabla\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_\ell$$

* Definimos el vector desplazamiento eléctrico $\vec{D}$

(101.1) $\boxed{\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$

(101.2) $\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell}$ ley de Gauss en dieléctricos.

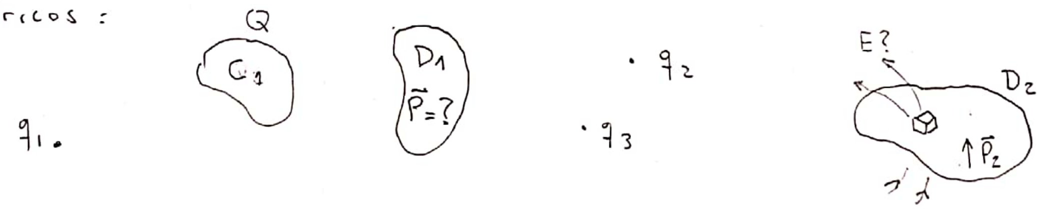
que tiene una formulación integral:

(101.3) $$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\ell\, enc}}$$

donde $Q_{\ell\, enc}$ es la carga libre total encerrada por la superficie de integración S.

obs.: Lo bueno de las ecs. (101.2) y (101.3) es que me permiten calcular $\vec{D}(\vec{r})$ haciendo referencia solo a las cargas libres, que en general son las que conocemos en un problema.

obs.: Imaginen un problema en el que colocamos una combinación de cargas (por ejemplo en conductores) junto con dieléctricos:



Las cargas van a generar un campo que va a producir una polarización del dieléctrico $\vec{P}$. Esta polarización a su vez modifica al campo $\vec{E}$, que altera la polarización... !!
Complicado.
La ley de Gauss para $\vec{D}$ nos permite resolver $\vec{D}(\vec{r})$ sin conocer $\vec{P}$, que en principio es una incógnita.

obs.: ¿Qué pasó con la carga σ_P? ¿No la tuvimos en cuenta?
Justo en la interfase la densidad de carga cambia abruptamente; ρ_b diverge allí ya que la derivada de $\vec{P}$ tiene una discontinuidad.
En todo el resto del espacio vale la ley de Gauss. Su formulación integral, por otro lado, no tiene este problema.

OJO. El desplazamiento $\vec{D}$ <u>NO</u> satisface una ley de Coulomb:

$$\vec{D}(\vec{r}) \neq \frac{1}{4\pi} \cdot \int \frac{\hat{r}}{r^2} \rho_\ell(\vec{r}\,') \, dv'$$

La razón es que, si bien $\nabla \cdot \vec{D}$ está determinada por $\rho_\ell(\vec{r})$ para definir $\vec{D}(\vec{r})$ hace falta conocer también $\nabla \times \vec{D}$.

Mientras que sabemos que $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$, resulta que:

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \varepsilon_0 \cancel{\nabla \times \vec{E}} + \nabla \times \vec{P} = \nabla \times \vec{P}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}}$$

Y en general esto <u>no es cero</u>.

<u>Condiciones de contorno en presencia de dieléctricos.</u>

En clase anterior vimos que la ley de gauss y $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ imponían condiciones de contorno sobre $\vec{E}$ y $V(\vec{r})$; p. 49-51. Estas condiciones describen relaciones de continuidad o discontinuidad para los campos.

Podemos formular estas relaciones para el caso en que hay dieléctricos polarizados presentes.

En la interfase $\begin{cases} + \text{ denota del lado de "afuera"} \\ - \quad " \quad\; " \quad " \quad\; " \text{ "adentro"} \end{cases}$

- $\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_\ell \Rightarrow \boxed{D_{\perp +} - D_{\perp -} = \sigma_\ell}$
- $\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P} \rightarrow \oint_c \vec{D} \cdot d\vec{l} = \oint_c \vec{P} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \boxed{D_{\parallel +} - D_{\parallel -} = P_{\parallel +} - P_{\parallel -}}$

Estas relaciones se demuestran siguiendo la logica que ya usamos (p. 49-51) empleando una superficie gaussiana pequeña cercana a la superficie, y un camino cerrado también pequeño y bien cerca de la interfase.

Materiales dieléctricos lineales.

- Vimos que un objeto polarizado genera un campo eléctrico, debido a la presencia de cargas de polarización.
- Introdujimos el vector desplazamiento eléctrico, que satisface una ley de Gauss con las cargas libres como fuentes.
- A nivel microscópico, discutimos dos mecanismos: inducción dipolar y alineación dipolar, que describen como se comportaría un material dieléctrico en presencia de un campo, generando una polarización.

En algunos materiales, la polarización resultante es proporcional al campo:

(103.1) $$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}}$$ polarización en un material lineal.

La constante χ se llama susceptibilidad eléctrica del medio.

- Es un número, no tiene unidades, ~~porque~~ se "sacan" las unidades con el ε_0.
- El campo $\vec{E}$ en la ecuación (103.1) es el campo total, es decir que incluye contribuciones de cargas libres y cargas de polarización. Dicho de otro modo: OJO que si hay un campo externo $\vec{E}_0$ y traemos a esta región del espacio un dieléctrico de susceptibilidad χ, la polarización resultante NO es $\varepsilon_0 \chi \vec{E}_0$. El material polarizado producirá también un campo que contribuya a $\vec{E}$.

La estrategia más conveniente es en general calcular primero el vector $\vec{D}$. En un medio dieléctrico lineal tendremos

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{E}$$

Introduciendo la permitividad del medio ε:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 (1+\chi)}$$

resulta

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$$

- en el vacío, donde no hay ningún medio que polarizar,

$\chi = 0$ y $\varepsilon_{vacio} = \varepsilon_0$

por eso ε_0 es la permitividad del vacío.

- A veces se usa la constante dieléctrica, o permitividad relativa ε_r (en algunos libros se la llama κ)

$$\kappa = \varepsilon_r \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi$$

Linealidad, isotropía, homogeneidad.

Hay materiales, típicamente los cristales, que se polarizan mas fácilmente en algunas direcciones que en otras. En estos casos la relación (103.1) puede generalizarse introduciendo el tensor de susceptibilidad del medio $[\chi_{ij}]$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 [\chi_{ij}] . \vec{E}$$

Fíjense que aún $\vec{P} \sim \vec{E}$, sigue siendo un medio lineal.

- En un medio no lineal, $\vec{P}$ puede ser función de potencias más altas de $\vec{E}$, por ejemplo: $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} + \xi . |\vec{E}|^2 . \vec{E}$

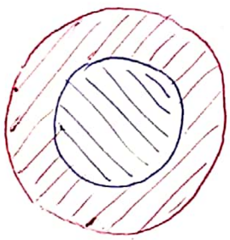
- En un medio isótropo $[\chi_{ij}] = \chi \mathbb{1} \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$.

- En un medio homogéneo $\chi(\vec{r}) \equiv \chi$.

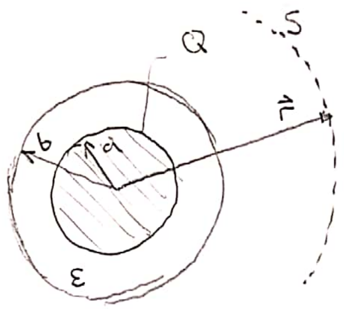
  si el medio es no homogéneo la susceptibilidad cambia de un punto a otro del medio y tenemos $\chi(\vec{r})$ no uniforme.

En general vamos a tratar con medios isótropos y lineales pero puede que aparezca algún problema con un medio no homogéneo.

Ejemplo: esfera conductora recubierta de dieléctrico.



- Conductor esférico radio $\underline{a}$ y carga Q.
- dieléctrico lineal, isotrópico y homogéneo de radios $\underline{a}$ y $\underline{b}$, permitividad ε.



- la carga libre está distribuida uniformemente en la esfera de radio a:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

Usamos la ley de Gauss para $\vec{D}$ junto con la simetría de la distribución de carga libre.

(105.1) $$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \oint_S D(r)\,\hat{r} \cdot ds\,\hat{r} = D(r) \cdot \oint ds = D(r) \cdot 4\pi r^2.$$

$(r > a)$ $$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_\ell = Q \quad \Rightarrow \quad D(r) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad \therefore \quad \vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2}\,\hat{r} \quad (r > a$$

$(r < a)$ $Q_\ell = 0$ (dentro del conductor) $\therefore$ $\vec{D} = 0$ y $\vec{E} = 0$, $\vec{P} = 0$.

Fíjense que al aplicar la ley de Gauss en $\vec{D}$ no nos importa la interfase $r = b$ ya que allí no hay carga libre.

Conociendo $\vec{D}$, es sencillo hallar $\vec{E}$ y $\vec{P}$: $\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \vec{D}$

(105.2) $$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < a \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \dfrac{Q}{r^2}\,\hat{r} & \text{si } a < r < b \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{Q}{r^2}\,\hat{r} & \text{si } b < r \end{cases}$$

(105.3) $$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 \chi}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \hat{r}$$ para $a < r < b$ (en el dieléctrico

$\vec{P} = \vec{0}$ fuera del dieléctrico

Conociendo $\vec{P}$, es sencillo determinar las cargas de polarización ρ_p y σ_p:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

en esféricas, la divergencia de $\vec{V}$ es

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 . V_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta . V_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}\left(V_\phi\right)$$

Pero $\vec{P}$ tiene solo una componente radial en $\hat{r}$:

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varepsilon_0 \chi Q}{4\pi\varepsilon}\right) = 0 \qquad \forall r \in (a,b).$$

$$\therefore \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

En cuanto a la densidad de carga superficial

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

donde $\hat{n}$ es normal (hacia afuera) de la superficie.

La cobertura dieléctrica tiene <u>dos</u> superficies, una externa de radio <u>b</u> con normal $\hat{n}_b = \hat{r}$, y otra interna de radio <u>a</u> con normal $\hat{n}_a = -\hat{r}$. Así,

$$\sigma_p(b) = \vec{P} \cdot \hat{r} = \frac{\varepsilon_0 \chi Q}{4\pi b^2 \varepsilon} \qquad \text{(superficie externa)}$$

$$\sigma_p(a) = \vec{P} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{\varepsilon_0 \chi Q}{4\pi a^2 \varepsilon} \qquad \text{(superficie interna)}$$

. observación: la carga total de polarización debe sumar cero ¿Es así?

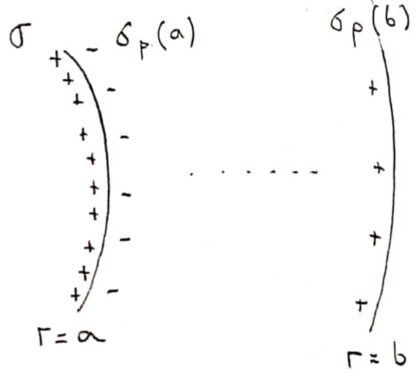
$$Q_p = \cancel{\rho_p} . V + \underbrace{\sigma_a . S_a}_{\text{superficie esférica interna}} + \underbrace{\sigma_b \, S_b}_{\text{superficie esférica externa}}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \chi Q}{\cancel{4\pi b^2} \varepsilon} . \cancel{4\pi b^2} + (-) . \frac{\varepsilon_0 \chi Q}{\cancel{4\pi a^2} \varepsilon} . \cancel{4\pi a^2} = \frac{\varepsilon_0 \chi Q}{\varepsilon}(1-1) = 0$$

. observación: la carga de polarización en la cara interna es negativa ($\sigma_p(a) < 0$). Tiene sentido: la carga Q atrae las cargas dipolares negativas hacia adentro. Estas cargas apantallan parcialmente la carga Q del conductor interno.

como consecuencia el campo se ve atenuado en el interior del dieléctrico, ec. (105.2).

• Finalmente, ahora que conocemos como están distribuidas las cargas de polarización ρ_p y σ_p, podemos volver a calcular el campo $\vec{E}$, esta vez usando la ley de Gauss para $\vec{E}$ con toda las cargas presentes (y ahora sí, conocidas):



En particular, entre $a < r < b$, la carga encerrada por una esfera Gaussiana de radio r será debida a Q y a $\sigma_p(a)$:

$$Q_{enc} = Q + (-)\frac{\varepsilon_0 \chi Q}{4\pi a^2 . \varepsilon} \cdot 4\pi a^2 = \left[1 - \frac{\varepsilon_0 \chi}{\varepsilon}\right] \cdot Q$$

rec. $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi \longrightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi)$

$$1 - \frac{\varepsilon_0 \chi}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0 \chi}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$$

$$\therefore Q_{enc} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \cdot Q$$

$$\therefore \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_{enc}}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}\hat{r} \quad \text{para } a < r < b$$

de acuerdo con lo que ya habíamos encontrado.

obs: esta es una buena manera de verificar el resultado cuando resolvemos problemas con dieléctricos.

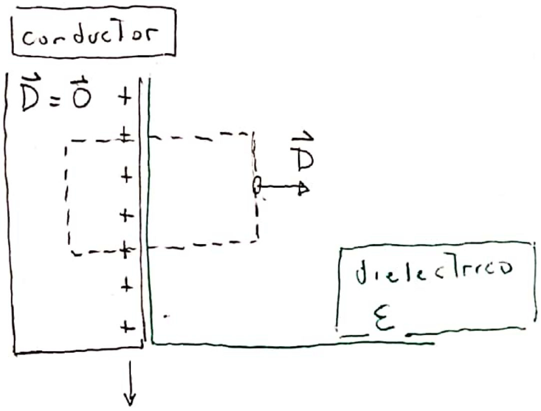
Scanned with CamScanner

Dieléctricos en capacitores.

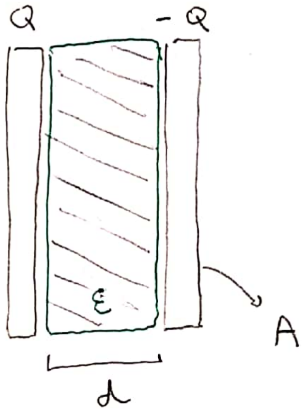
Como el efecto de los dieléctricos es, cualitativamente, atenuar el campo eléctrico, si rellenamos un capacitor con un medio dieléctrico esperamos que para una carga dada: el campo disminuya $\rightarrow$ disminuya la diferencia de potencial $\rightarrow$ aumente la capacidad.

Recordemos que $C = \dfrac{Q}{V}$.

- Consideramos un capacitor de placas paralelas de área A a una distancia d con una carga Q, relleno con un medio dieléctrico de constante κ (permitividad $\varepsilon = \kappa \varepsilon_0$)



carga Q
densidad $\sigma = Q/A$



Aplicando Gauss obtenemos $D \cdot S = \sigma \cdot S \quad \therefore \quad D = \sigma$

$$E = \frac{1}{\varepsilon} D \quad \therefore \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$V = E d = \frac{\sigma d}{\varepsilon} = Q \frac{d}{A \varepsilon} = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}_{\kappa} \cdot \underbrace{\frac{d}{A \varepsilon_0}}_{C_0^{-1}} \cdot Q$$

C_0^{-1}: capacitor vacío.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \kappa C_0$$

$$\boxed{C = \kappa C_0}$$

$\therefore$ la capacidad aumenta: podemos guardar más carga al mismo potencial V.