Energía de configuraciones de carga con dieléctricos.

Vimos que para cargar un capacitor hay que realizar trabajo, y que la energía almacenada en el dispositivo es

$$W = \frac{1}{2} C . V^2 \qquad \text{(rec. la ec. 79.2)}$$

Cuando el capacitor se rellena con un dieléctrico de constante κ

$C \longrightarrow \kappa C_0$ donde C_0 es la capacidad cuando está vacío

Esperamos entonces que

$$W = \frac{1}{2} \kappa C_0 V^2 = \kappa \left(\frac{1}{2} C_0 V^2 \right) = \kappa W_0$$

Es decir que el trabajo necesario para cargarlo –y por lo tanto la energía almacenada una vez cargado– se multiplica por κ. Como $\kappa > 1$ la energía es mayor. Tiene sentido: hay que traer más carga al capacitor para llegar al mismo potencial, porque ahora el campo se ve parcialmente atenuado por los dipolos que se inducen en el dieléctrico.

Examinemos el proceso de carga con más detalle.
Con el dieléctrico en posición, traemos la carga libre de a poco en incrementos $\delta \rho_\ell$. A medida que hagamos esto la polarización cambiará gradualmente y con ésta las cargas de polarización. Calcularemos el <u>trabajo</u> que hacemos sobre la <u>carga libre</u>:
Para traer un incremento de carga $\delta\rho_\ell$ al volumen en el potencial V:

$$\delta W = \int_{\mathcal{V}} \delta \rho_\ell . V \, d\mathcal{V}' \qquad \text{(p. 36, 37)}$$

Podemos usar la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico para reescribir esta expresión en función de los campos

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell \quad \longrightarrow \quad \delta \rho_\ell = \delta (\nabla \cdot \vec{D}) = \nabla \cdot \delta \vec{D}$$

donde $\delta \vec{D}$ es el cambio en el desplazamiento.

$$\therefore \quad \delta W = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\delta \vec{D}) . V(\vec{r}\,') \, d\mathcal{V}'$$

Tenemos la familiar integral de un campo vectorial x campo escalar, que sabemos integrar por partes:

$$\nabla\cdot(\delta\vec{D}\cdot V) = \nabla\cdot\delta\vec{D}\ V + \delta\vec{D}\cdot\nabla V$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\delta\vec{D})\,V = \nabla\cdot(\delta\vec{D}\,V) - \delta\vec{D}\cdot\nabla V$$

$$\delta W = \int_{r} d\upsilon'\,\nabla\cdot(\delta\vec{D}\,V) - \int_{r} d\upsilon'\,\delta\vec{D}\cdot\nabla V$$

recordando que $-\nabla V = \vec{E}$ y usando el teorema de la divergencia

$$\delta W = \oint_{S} (\delta\vec{D}\,V)\cdot d\vec{s} + \int_{r} d\upsilon'\,\delta\vec{D}\cdot\vec{E}$$

Extendiendo las integrales a todo el espacio (recordemos que podemos hacerlo porque $\rho_\ell = 0$ fuera de r) vemos que la primera integral se va a cero, ya que la superficie S queda muy lejos de la distribución de cargas y los campos decaen más rápido que S con r. Queda:

$$\boxed{\delta W = \int \delta\vec{D}\cdot\vec{E}\,d\upsilon'}$$

Hasta acá, esta expresión es general.

Para seguir avanzando, consideraremos el caso de un medio lineal con lo que:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

Tomando una diferencia pequeña $\delta\vec{D}$, el argumento de la integral

$$\delta\vec{D}\cdot\vec{E} = \delta(\varepsilon\vec{E})\cdot\vec{E} = \varepsilon\,\delta\vec{E}\cdot\vec{E} = \varepsilon\,\frac{1}{2}(\delta\vec{E}\cdot\vec{E} + \vec{E}\cdot\delta\vec{E})$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\,\delta(\vec{E}\cdot\vec{E})$$

$$= \frac{1}{2}\delta(\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}) = \frac{1}{2}\delta(\vec{D}\cdot\vec{E}) = \delta\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\right)$$

$$\therefore\ \delta\vec{D}\cdot\vec{E} = \delta\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\right)$$

$$\delta W = \delta\left(\frac{1}{2}\int\vec{D}\cdot\vec{E}\,d\upsilon\right)$$

Esta expresión nos da el incremento de Trabajo para traer una pequeña porción de la carga libre. Para armar la distribución de carga libre desde cero a su valor final

(111.1) $$W = \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\, dv \qquad \text{(para medios lineales)}$$

Podemos compararla con la ec. (41.3) que derivamos en un contexto bastante general:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{E}\, dv \qquad (41.3)$$

Vemos que (111.1) corresponde a "reemplazar" $\varepsilon_0 \vec{E} \rightarrow \varepsilon \vec{E} = \vec{D}$ en (41.3

observación: len presencia de dieléctricos, las ecuaciones (111.1) y (41.3) representan distintas maneras de armar la distribución de carga. En la ec. (41.3) traemos las cargas una por una, incluso las que corresponden a los dipolos inducidos en el dieléctrico, y por lo tanto esta expresión no contempla el trabajo necesario para deformar los moléculas (u orientarlas) hasta obtener la polarización final del medio. Es decir que (41.3) no es incorrecta en presencia de dieléctricos, pero representa una manera poco física de armar la distribución de cargas.

La ec. (111.1) representa el trabajo realizado moviendo las cargas libres, con el dieléctrico en su posición e inicialmente no polarizado. Pero a medida que traemos carga libre el dieléctrico se polariza. La expresión (111.1) por lo tanto <u>sí</u> incluye el trabajo necesario para polarizar el medio, y por lo tanto suele tener más aplicación ya que esto es lo que uno haría en el laboratorio por ejemplo.