Corrientes estacionarias.

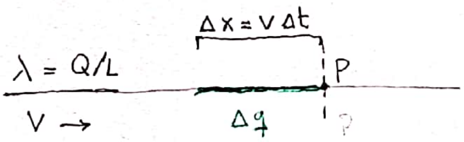
Corriente eléctrica y densidad de corriente.

def. Una corriente eléctrica es carga eléctrica en movimiento.

Los portadores de carga que dan lugar a la corriente pueden ser variados: cualquier partícula cargada, como electrones, protones o iones. (átomos cargados positiva o negativamente).

No necesitan ser cargas libres: un aislante cargado que se mueve en el espacio genera una corriente.

HILO. Imaginemos por un momento un hilo que tiene una densidad lineal de carga $\lambda = Q/L$. El hilo se mueve a lo largo de su eje con velocidad v.



La corriente I se define como la cantidad de carga que pasa por un punto del hilo por unidad de tiempo.

En un tiempo Δt, por el punto P pasará un tramo del hilo de longitud

$$\Delta x = v\,\Delta t$$

con una carga

$$\Delta q = \lambda\,\Delta x .$$

La carga que atraviesa el punto P durante el tiempo Δt

$$\Delta q = \lambda\, v\,\Delta t$$

Luego la corriente que genera el hilo en movimiento

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lambda v \qquad \text{en este caso.}$$

Las unidades de la corriente son

$$[I] = \frac{C}{s} = A \qquad (\text{Ampère})$$

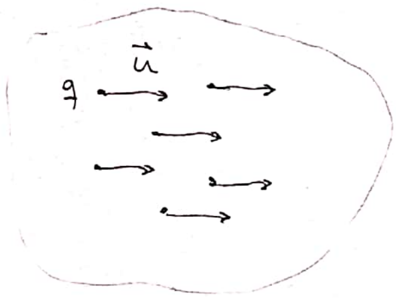
Def. Una <u>corriente</u> es <u>estacionaria</u> si no varía con el tiempo.

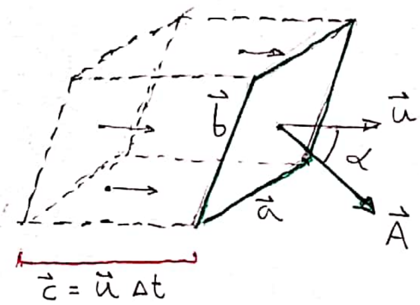
En un hilo, una corriente estacionaria debe ser además uniforme, es decir, la misma en todos los puntos del hilo.
Si no fuera así tendríamos acumulaciones de carga dependientes del tiempo.

Consideramos ahora un conjunto de portadores de carga moviéndose en un volumen tridimensional...

Densidad de corriente:

Supongamos que hay una densidad promedio de portadores de carga n.
Es decir que en cierta región del espacio tenemos n portadores por unidad de volumen.
Imaginemos que todos se mueven en la misma dirección con velocidad $\vec{u}$, y que la carga de los portadores es q:





Imaginemos ahora una superficie de área A definida por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$: $\vec{A} = \vec{a} \times \vec{b}$; $|\vec{A}| = A$ (pequeña).

Quisiéramos calcular cuantos portadores la atraviesan en un tiempo pequeño Δt. Serán los portadores cuyas trayectorias atraviesen la superficie, y que al tiempo t estén dentro de una distancia $u\,\Delta t$ de la misma. Esto define un volumen en el espacio: un prisma definido por los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{u}\,\Delta t$. Este volumen puede expresarse como el triple producto vectorial:

$$\Delta V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{u}\,\Delta t = \vec{A} \cdot \vec{u}\,\Delta t \qquad = A u \cos\alpha \,\Delta t$$

El número de portadores en este volumen será en promedio

$$N = n\,\Delta V = n\,\vec{A} \cdot \vec{u}\,\Delta t$$

La carga Δq que atraviesa la superficie en un tiempo Δt será

$$\Delta q = N q = n q \vec{A} \cdot \vec{u} \, \Delta t$$

La corriente a traves de la superficie $\vec{A}$

$$\boxed{I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = n q \, \vec{u} \cdot \vec{A}}$$

Supongamos ahora que hay más de un tipo de portador. Digamos que hay portadores de carga q_i y densidad n_i que se mueven con velocidad $\vec{u}_i$. Entonces

$$I = \left[\sum_{i=1}^{N_p} n_i q_i \vec{u}_i \right] \cdot \vec{A}$$

Lo que aparece entre corchetes define la densidad de corriente $\vec{J}$

$$\boxed{\vec{J} \equiv \sum n_i q_i \vec{u}_i}$$

de modo que:

$$I_{\vec{A}} = \vec{J} \cdot \vec{A}$$

<u>En un conductor</u>, los portadores de carga serán electrones de carga $q = -e$ que en general se mueven en todas direcciones con velocidades que dependen de la temperatura. Podemos agrupar los electrones entre los que se mueven con la misma velocidad $\vec{u}_i$.

Definiendo la <u>velocidad media</u> $\langle \vec{u} \rangle$

$$\boxed{\langle \vec{u} \rangle = \frac{1}{N_e} \cdot \sum n_i \vec{u}_i}$$

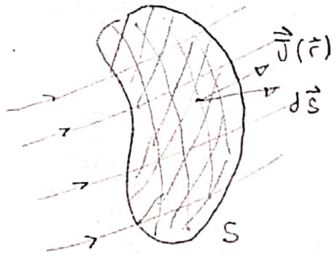
donde n_i es la densidad de electrones con velocidad $\vec{u}_i$ y N_e es la densidad volumetrica de electrones portadores en el conductor. Vemos entonces que:

$$\boxed{\vec{J} = -e N_e \langle \vec{u} \rangle}$$

Es decir que la densidad de corriente depende de la velocidad media de los portadores.

Ecuación de continuidad y corrientes estacionarias.

Si $\vec{J}(\vec{r})$ es la densidad de corriente en el espacio, la corriente a través de una superficie S será

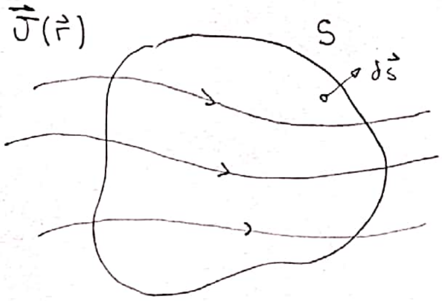


(115.1) $$I_S = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

En general, definimos una corriente estacionaria cuando la densidad de corriente $\vec{J}$ permanece constante en todo punto del espacio, es decir

(115.2) $$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r})$$

Imaginemos una superficie cerrada S en una región en la que hay una corriente estacionaria $\vec{J}$:



La integral sobre S,

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

nos da la rapidez con que la carga sale (o entra) de S.

Supongamos que $I > 0$. Esto quiere decir que los portadores de carga están saliendo de S. Si siguen saliendo de manera estacionaria, en algún momento nos quedaremos sin carga, ya que por conservación de la carga ésta no se crea de la nada. Entonces, para que $\vec{J}$ sea efectivamente estacionaria debe ser

(115.3) $$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad \forall S.$$

Por el Teorema de la divergencia

(115.4) $$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla \cdot \vec{J})\, dv = 0$$

(116.1) $\therefore \boxed{\nabla \cdot \vec{J} = 0}$

para una <u>densidad de corriente estacionaria</u>.

Si la corriente no es estacionaria, podemos generalizar ésta ecuación.
Dada $\vec{J}(\vec{r}, t)$, la integral

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

nos da la rapidez con la que la carga entra o sale de S.

Por conservación de la carga, esto debe ser balanceado por un cambio correspondiente en la densidad de carga:

(116.2) $$\boxed{\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}\,') \, dv'}$$

Por el teorema de la divergencia tenemos además

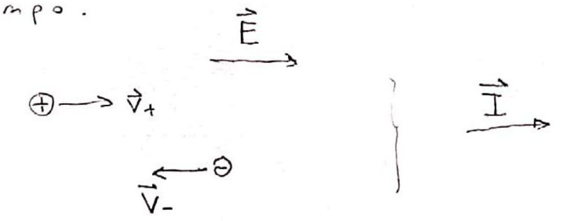
$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla \cdot \vec{J}) \, dv' = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv' \qquad \forall S, V \; ; \text{ luego:}$$

(116.3) $$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad \text{ó} \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Esta se llama <u>ecuación de continuidad</u> y es un resultado de la conservación de la carga. La ec. (116.2) es su forma integral.

Conductividad eléctrica. Ley de Ohm.

En presencia de un campo eléctrico, los portadores de carga positivos se mueven en la dirección de $\vec{E}$ y los negativos en dirección contraria. En cualquier caso, se genera una corriente en la dirección del campo.



En muchos materiales, y para un amplio rango de intensidades del campo, resulta:

(117.1) $$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$ <u>ley de Ohm.</u>

La constante σ se llama <u>conductividad del material</u>.
(si, se usa la misma letra que para densidad superficial de carga).

<u>obs</u>. El valor de σ es enorme para conductores y extremadamente pequeño para aisladores.

<u>obs</u>. En general, puede suceder que σ sea un tensor. Es el caso de materiales anisotrópicos, en los que $\vec{J}$ no es paralela a $\vec{E}$. Nosotros consideraremos materiales isotrópicos $[\sigma_{ij}] = \sigma . \mathbb{1}$ con lo que σ es un escalar.

<u>obs</u>: la ley de Ohm, es una ley empírica, una relación que se encuentra experimentalmente en muchos materiales, pero su validez <u>no</u> es universal!

<u>Implicancias de la ley de Ohm y otras formulaciones.</u>

Entonces, segun la ley de Ohm $\vec{J}$ es proporcional a $\vec{E}$

$$\vec{J} \sim \vec{E}$$

Por un lado, tenemos que como la corriente I es la integral de $\vec{J}$ en una superficie (115.1):

$$I \sim J$$

(si duplicamos $\vec{J}(\vec{r})$ en todos lados, se duplica $I(\vec{r})$)

Por otro lado, el potencial es la integral de línea del campo

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad , \text{ luego } \quad V \sim E$$

(si duplicamos $\vec{E}(\vec{r})$ en todo el espacio $\Rightarrow$ se duplica $V(\vec{r})$)

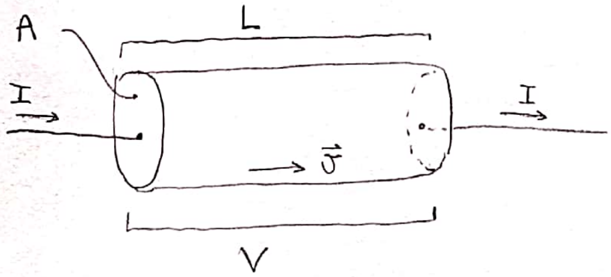
Luego, debe haber una relación de proporcionalidad entre la corriente y el potencial:

(118.1) $$\boxed{V = RI}$$

Esta es una formulación alternativa de la ley de Ohm.

Acá R es la resistencia del material entre dos puntos.

Consideremos una barra solida de un material de conductividad σ.



La barra tiene una longitud L y una sección transversal A. Por la misma circula una corriente estacionaria I.

$$\Rightarrow \quad J = \frac{I}{A} \qquad (118.2)$$

Si la diferencia de potencial entre los extremos de la barra es V, el campo eléctrico será:

$$E = \frac{V}{L} \qquad (118.3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$EL = RAJ$$

De la expresión (117.1) de la ley de Ohm, $\quad J = \sigma E$

$$\therefore \; R = \frac{EL}{AJ} = \frac{L}{\sigma A}$$

(118.2) $$\boxed{R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{L}{A} = \rho \frac{L}{A}}$$. la

Donde $\rho \equiv \sigma^{-1}$ se llama <u>resistividad</u>.

<u>Obs</u>. la resistencia R depende de propiedades intrínsecas del material (σ ó ρ) y de la geometría de la barra (L y A).

- La unidad de resistencia es el Ohm : $1\,\Omega = \frac{V}{A}$ }

<u>observación</u>: La ley de Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ tiene consecuencias interesantes para <u>corrientes estacionarias</u> en medios con <u>conductividad uniforme</u>.

conduct. uniforme: $\sigma(\vec{r}) \equiv \sigma$.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\sigma}\vec{J}\right) \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{\sigma}\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

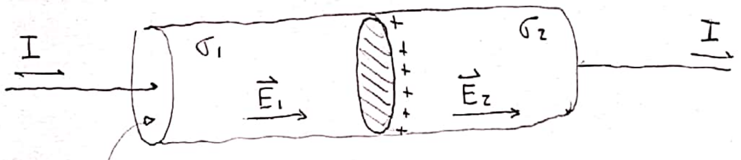
| pues $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ para corrientes estacion.

es decir $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, lo que implica, según la ley de Gauss, que la densidad de carga es nula $\rho = 0$ en esta región.

$\therefore$ Cualquier desbalance de carga debe estar en la superficie.

- <u>rec</u>: habíamos demostrado esto para cargas estacionarias (quietas) usando $\vec{E} = 0$. Acá vemos que sigue siendo cierto para cargas móviles

Si σ no fuera uniforme, entonces puede haber acumulación de cargas. Imaginemos dos medios conductores con σ_1 y σ_2 por los que circula una corriente I con densidad $\vec{J}$:



A area constante $\Rightarrow$ $\vec{J}$ uniforme y constante

$$\Rightarrow \quad \vec{J} = \sigma_1 \vec{E}_1 = \sigma_2 \vec{E}_2 \quad \rightarrow \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\vec{E}_1$$

Es decir, el campo tiene valores diferentes $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$, con una discontinuidad en la superficie que separa ambos materiales. Si recordamos las condiciones de contorno para $\vec{E}$ en superficies, ec. (50.3) vemos que esta discontinuidad de $\vec{E}$ implica una densidad superficial de cargas en dicha superficie,

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right)\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

| <u>OJO</u>: acá σ es una densidad de cargas; ¡atentos a la notación!

Comentario: hasta ahora habíamos dicho que $\vec{E} = \vec{0}$ dentro de un conductor. Pero ahora las cargas están en movimiento. Esto ya no es electrostática, $\vec{J} \neq \vec{0}$.

Al margen, para conductores perfectos $\sigma \to \infty$ y aún vale que $\vec{E} = \vec{0}$, aun si $\vec{J} \neq \vec{0}$: $\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \cdot \vec{J} = 0$ (conductor ideal)

Cuando pensemos en circuitos de corriente continua (estacionaria) los elementos del circuito (por ejemplo baterías, resistencias y capacitores) van a estar conectados mediante hilos conductores ideales (de resistencia nula) y por lo tanto en estos hilos $\vec{E} = \vec{0}$ y $V = cte$, es decir forman equipotenciales.