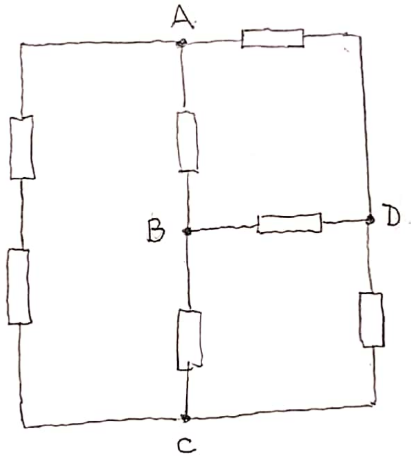
Repaso. Circuitos con corrientes estacionarias

(corriente continua : c.c)

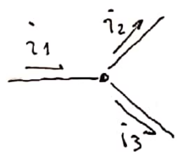
Repasamos algunas definiciones, que ilustramos con el circuito:

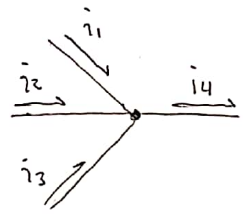


- las cajas representan elementos de circuito, componentes, pueden ser resistencias o baterías

Nodo: un nodo es un punto en el que convergen tres o más líneas del circuito. En el ejemplo hay 4 nodos: A, B, C, D.

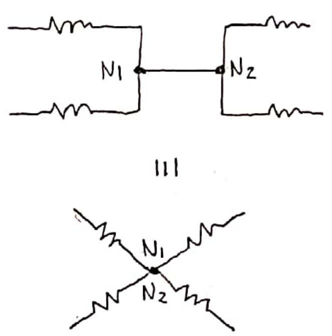
Son puntos en los que la corriente puede dividirse o volver a juntarse. Por ejemplo:





Notación:
i : corriente física o corriente de rama...

A veces un circuito está dibujado o realizado de manera tal que puede simplificarse uniendo nodos; por ejemplo

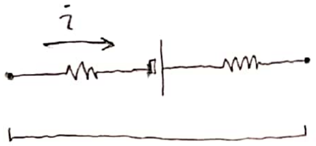


- como el hilo entre el nodo N_1 y el N_2 es un conductor ideal, tiene resistencia nula, es equipotencial. entonces es como si los nodos fueran uno solo.

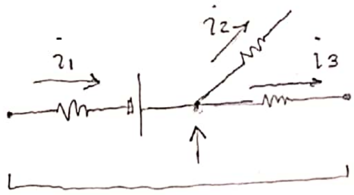
obs: el número mínimo de nodos es $N_n = 2$...

<u>Rama:</u> un conjunto de elementos de circuito (resistencias, baterías) conectados por hilos conductores ideales <u>en serie</u>.
De modo que <u>la corriente</u> que circula por todos los elementos es <u>la misma</u>, ya que no hay nodos en los que se bifurque.
En el ejemplo hay 6 ramas: AB, BC, AD, CD, BD, AC.

Otros ejemplos:



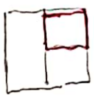
es una rama



NO es una rama

Podemos decir también que una rama es lo que hay entre nodos.

<u>Malla:</u> cualquier <u>camino cerrado</u> circulando por las ramas de un circuito. En el ejemplo ilustrativo hay muchas formas de recorrer el circuito y definir mallas:



ABDA

BCDB

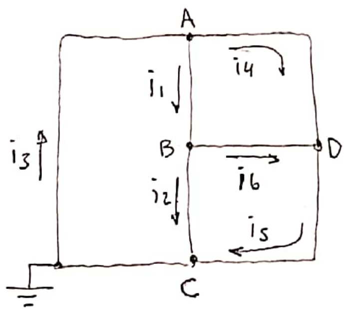
ABCA

. . . .

ACBDA

. . .

<u>Elección de corrientes, y potenciales de referencia.</u>



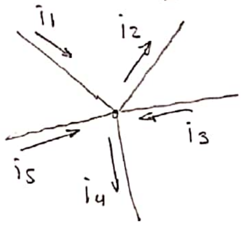
V = 0

- al plantear la resolución de un circuito elegimos la dirección de cada corriente, en principio arbitrariamente, sobre cada rama. (o malla).

↳ también podemos elegir un punto de referencia para el potencial. en la práctica puede hacerse con una conexión a Tierra (V=0).

Leyes de Kirchhoff.

Ley de nodos (o ley de las corrientes): por conservación de la carga la suma algebraica de las corrientes que entran y salen de un nodo es cero: $\boxed{\sum_{\mu=1}^{N} i_\mu = 0}$

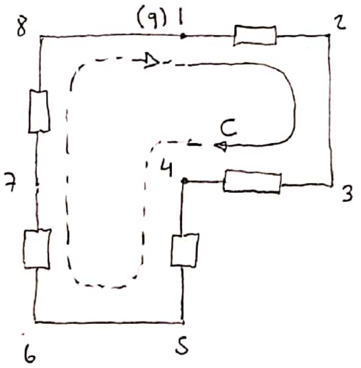


$i_1 + i_3 + i_5 - i_2 - i_4 = 0.$

Ley de mallas (ó ley de las potenciales):

En una malla cualquiera (es decir, un camino cerrado), la suma de las diferencias de potencial a través de cada elemento es cero.

Ejemplo:



$$\oint dV = (\cancel{V_2} - V_1) + (\cancel{V_3} - \cancel{V_2}) + (V_4 - \cancel{V_3}) + (V_5 - V_4) +$$
$$(V_6 - V_5) + (V_7 - V_6) + (V_8 - V_7) + (V_1 - V_8)$$

$$\boxed{\sum \Delta V_\mu \equiv 0.}$$

Las diferencias de potencial pueden deberse a

- baterías: $\Delta V = \mathcal{E}$
- resistencias: $\Delta V = iR$

Otra forma de escribir esta regla de Kirchhoff es

$$\underbrace{\sum \mathcal{E}_j}_{\text{Todas las fem de la malla}} - \underbrace{\sum R_j i_j}_{\text{Todas las resistencias de la malla}} = 0$$

Resolución de circuitos de corriente continua: Método de ramas (general)

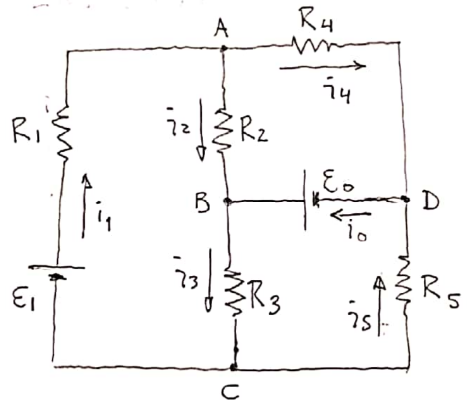
Empleando las leyes de Kirchhoff es posible formular un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y acopladas.

Imaginemos un circuito que consta de N_n nodos, N_m mallas, N_r ramas.

En principio por cada rama circula una corriente, con lo que habrá un número N_r de corrientes a determinar.

Supongamos que conocemos todos los componentes del circuito, es decir los valores de las resistencias R_j y las fems $\mathcal{E}_j$ son dados, y deseamos determinar las corrientes en cada rama.

Para visualizar el problema tomemos como ejemplo el circuito.



- dibujamos también las corrientes en cada rama, eligiendo un sentido de referencia: $i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$

$(N_r = 6\ ,\ N_n = 4)$

(1) Las ecuaciones más simples son las de la ley de nodos, ya que son sumas de corrientes sin coeficientes (las ecs. de la ley de mallas involucran los componentes $\mathcal{E}_j$ y R_j).

En principio hay N_n nodos (en el ejemplo $N_n = 4$) y por lo tanto podríamos escribir N_n ecuaciones.

En el ejemplo serían:

(A) $i_1 - i_2 - i_4 = 0$

(B) $i_0 + i_2 - i_3 = 0$

(C) $i_3 - i_1 - i_5 = 0$

(D) $i_4 + i_5 - i_0 = 0$

Sin embargo, una de las ecuaciones es redundante, linealmente dependiente de las otras. Por ejemplo, si tomamos el nodo D, cada una de las corrientes que participan (i_0, i_4, i_5) puede despejarse de las otras tres ecuaciones, en función de las otras corrientes (i_1, i_2, i_3), es decir que son "dependientes" de estas.

Visto de otro modo, una combinación lineal de las ecs. (A, B, C), en particular su suma, nos da la ec. (D).

En definitiva, la ley de nodos nos proporciona $N_n - 1$ ecuaciones independientes.

Para determinar las N_r corrientes, nos faltan

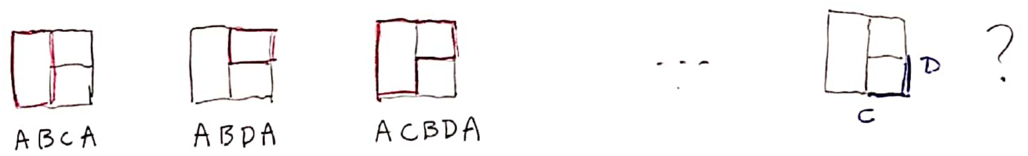
$$N_r - (N_n - 1) = N_r - N_n + 1 \equiv N_0$$

ecuaciones adicionales, que podemos formular, ahora sí, por

(2) la <u>ley de mallas</u> de Kirchhoff. En nuestro ejemplo, $N_0 = 3$.

Recordemos que hay muchas maneras de elegir las mallas. Algunas de estas son redundantes, linealmente dependientes.

Por ejemplo:



La malla ACBDA no agrega información a las mallas ABCA, ABDA; el conjunto de las tres mallas no tiene información sobre lo que sucede en la rama <u>CD</u>.

⇒ Una manera de asegurarnos que no dejamos nada fuera de las ecuaciones es pidiendo que <u>cada rama</u> aparezca <u>al menos una vez</u> en las <u>mallas elegidas</u>.

Formulando entonces $N_0 = 3$ ecuaciones para sendas mallas elegidas de este modo, tendremos un sistema completo de N_r ecuaciones lineales independientes; de aquí podemos resolver el sistema algebraico y obtener las corrientes i_j.

En nuestro ejemplo podrían ser las mallas: ABCA, ABDA, BCDB

(ABCA) $\varepsilon_1 - R_1 i_1 - R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0$.

(ABDA) $-R_2 i_2 - \varepsilon_0 + R_4 i_4 = 0$.

(BCDB) $\varepsilon_0 - R_3 i_3 - R_5 i_5 = 0$.

• junto con las ecs. (A, B, C) de la p. 132, podemos resolver para las corrientes.

Una vez que tenemos las corrientes, podemos calcular cualquier diferencia de potencial en el circuito.

Por ejemplo:

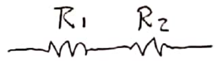
$\Delta V_{AC} = \mathcal{E}_1 - R_1 i_1$, o igualmente $\Delta V_{AC} = -R_2 i_2 - R_3 i_3$

También podemos calcular la potencia disipada o entregada por los componentes: Por ejemplo:

$P_0 = \mathcal{E}_0 i_0$ es la potencia entregada por la fem $\mathcal{E}_0$

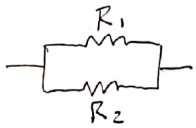
$P_1 = R_1 i_1^2$ es la potencia disipada en R_1.

Configuraciones simples: antes de formular las leyes de Kirchhoff resulta conveniente simplificar el circuito.

Componentes en serie: 

$\rightarrow$ 

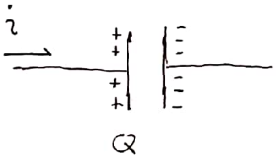
$R_e = R_1 + R_2$

Componentes en paralelo: 

$\rightarrow$ 

$R_e = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Capacitores en circuitos con corrientes estacionarias:



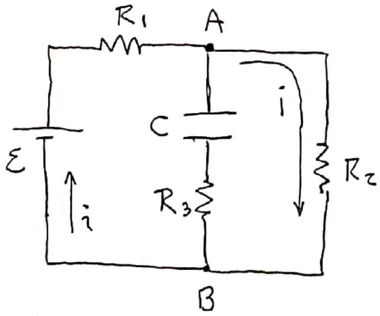
si hubiera una corriente: $i \neq 0$

la carga en el capacitor cambiaría: $\dot{Q} \neq 0$

y esto a su vez alteraría la corriente

$\Rightarrow$ corrientes estacionarias $\Rightarrow$ cargas constantes en capacitores

Ejemplo:



- no hay corriente en C, ni en R_3!
- solo una malla, con corriente i
- una vez que calculo i puedo determinar la diferencia de potencial

$$\Delta V_{AB} = \mathcal{E} - R_1 i$$

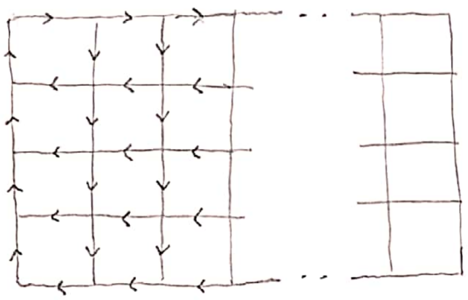
y así determinar la carga en el capacitor:

$$Q = C \cdot \Delta V$$

Metodo de Mallas. ó corrientes de malla.

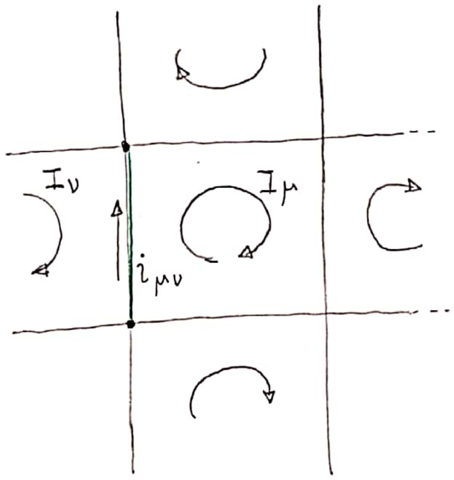
• es una manera alternativa, sistemática, que permite resolver una gran variedad de circuitos.

Para ilustrar, imaginemos un circuito que puede representarse como un arreglo de mallas, o una grilla:



• supongamos N_m mallas
• pueden faltar ramas, no hace falta que sea exactamente así la grilla;

El metodo consiste en resolver las mallas por separado, introduciendo corrientes auxiliares de malla I_μ con $\mu = 1 \dots N_m$.



• supongamos que $\nu \in V_\mu$ son las mallas vecinas de μ, que comparten alguna corriente de rama $i_{\mu\nu}$ (estas $i_{\mu\nu}$ son las corrientes físicas que circulan por cada rama).

$$i_{\mu\nu} \equiv I_\mu - I_\nu \qquad \text{con } \nu \in V_\mu$$

Podemos aplicar la ley de Kirchhoff de mallas a cada una de las mallas por separado:

$$\mathcal{E}_\mu = \sum_{\nu \in V_\mu} r_{\mu\nu}\, i_{\mu\nu}$$

• donde $r_{\mu\nu}$ son las resistencias (equiv.) de rama e $i_{\mu\nu}$ las corrientes que por ellas circulan.

• obs: el doble indice $(\mu\nu)$ identifica una rama de la malla μ, compartida por su vecina la malla ν.

• $\mathcal{E}_\mu$ es la fem Total a lo largo de la malla μ, puede ser la suma de mas de una fem ubicadas en distintas ramas.

Escribiendo las corrientes de rama en funcion de sus componentes corrientes de malla,

(136.1) $$i_{\mu\nu} = I_\mu - I_\nu$$

Tenemos:

(136.2) $$\mathcal{E}_\mu = \sum_{\nu \in \gamma_\mu} r_{\mu\nu}(I_\mu - I_\nu) = \Big(\sum_{\nu\in\gamma_\mu} r_{\mu\nu}\Big)\cdot I_\mu - \sum_{\nu\in\gamma_\mu} r_{\mu\nu} I_\nu$$

definimos:

(136.3) $$R_{\mu\mu} \equiv \sum_{\nu\in\gamma_\mu} r_{\mu\nu}$$ (resistencia equivalente de malla μ)

(136.4) $$R_{\mu\nu} \equiv -r_{\mu\nu}$$ para $\nu \in \gamma_\mu$, resistencias de rama $\times(-1)$

Queda:

(136.5) $$\mathcal{E}_\mu = R_{\mu\mu} I_\mu + \sum_{\nu\in\gamma_\mu} R_{\mu\nu} I_\nu \qquad \forall \mu = 1 \dots N_m$$

Podemos fijar el resto de los $R_{\mu\nu}$ a cero, es decir

(136.6) $$R_{\mu\nu} \equiv 0 \quad \text{si} \quad \nu \notin \gamma_\mu$$

y extender la suma:

(136.7) $$\mathcal{E}_\mu = \sum_{\nu=1}^{N_m} R_{\mu\nu} I_\nu \qquad \forall \mu = 1 \dots N_m$$

En forma vectorial, tenemos el sistema lineal

(136.8) $$\underline{\mathcal{E}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{I}$$ donde $\underline{\underline{R}} = [R_{\mu\nu}]$ definidos en (3,4,6)

$R_{\mu\mu} > 0$ y $R_{\mu\nu} \leq 0$ $\forall \mu,\nu = 1 \dots N_m$

Además $R_{\mu\nu} = R_{\nu\nu}$, es decir $\underline{\underline{R}}$ es simétrica.

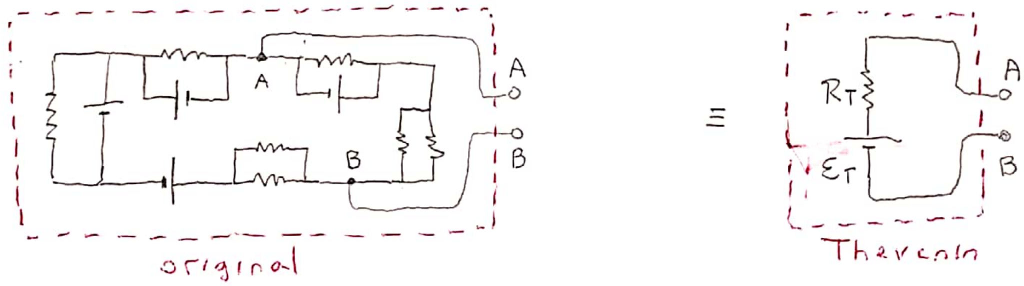
En estas condiciones (las mallas son linealmente independientes) la matriz R es invertibe y podemos resolver para $\underline{I}$

$$\underline{I} = \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{E}}$$

Una vez obtenidas I_μ, calculamos las corrientes de rama $i_{\mu\nu} = I_\mu - I_\nu$. <u>NOTA</u>: habitualmente alcanza con plantear las ecs. (136.2), si el número de mallas no es muy grande.

Equivalente de Thevenin.

Supongamos que tenemos un circuito mas o menos complicado, y que queremos conectar un componente (u otro circuito) en un par de puntos A y B:



Podemos reemplazar el circuito original por su equivalente de Thevenin: un circuito simple de una fem $\mathcal{E}_T$ y resistencia R_T que produce la misma relación $V(I)$ en los terminales AB.

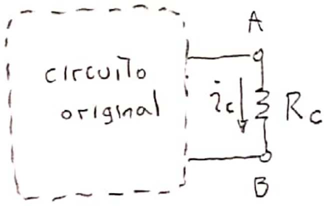
① Imaginemos primero que tenemos el circuito en una caja negra de donde salen los terminales A y B.

- primero, con el circuito abierto (CA), colocamos un voltímetro ideal (de resistencia infinita, corriente → 0) entre A y B, y determinamos $\mathcal{E}_T = \Delta V_{AB,CA}$
- luego, medimos la corriente entre A y B con un amperímetro ideal (de resistencia nula), ~~[illegible]~~ es decir la "corriente de corto circuito" (CC) I_{cc}. Como $\Delta V = I \cdot R$, debe ser

$$R_T \equiv \frac{\mathcal{E}_T}{I_{cc}}$$

Así determinamos el circuito equivalente de Thevenin dentro de la caja.

② Ahora, si en vez de tener una implementación real del circuito lo que tenemos es un diagrama, como el de más arriba, podemos proceder de forma similar, pero con cálculos en vez de mediciones.



Conectamos una resistencia de carga R_c a los terminales A, B y resolvemos el problema del circuito original con R_c.

Luego tomamos los límites

$R_c \to \infty$, corresponde al circuito abierto, y obtenemos $\mathcal{E}_T$

$R_c \to 0$, corresponde al corto circuito, obtenemos $R_T = \left.\dfrac{\mathcal{E}_T}{I_c}\right|_{R_c \to 0}$

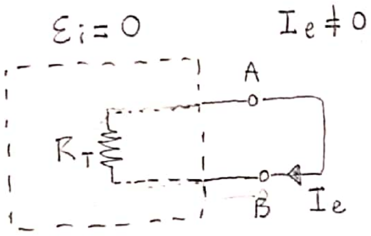
(3) El Teorema de Thevenin establece esta equivalencia más formalmente. Se basa en un principio de superposición, que tiene sus bases en la linealidad de las leyes de Kirchhoff.

- Esencialmente, para un circuito de componentes "lineales como los que hemos considerado, las ecuaciones algebraicas que relacionan las corrientes (las leyes de Kirchhoff) son lineales.
- En consecuencia, vale un principio de superposición, que nos permite hallar las corrientes prendiendo y apagando de a una cada fuente del circuito, y luego sumando las contribuciones de cada una.

Entonces, si queremos encontrar un equivalente de Thevenin que produzca la mismo relación Voltaje - Corriente que el circuito original, podemos aplicar una corriente externa I_e a las terminales AB y observar (o calcular) el voltaje.

El voltaje V observado va a depender de la corriente aplicada I_e y de los componentes del circuito interno; fuentes $\mathcal{E}_i$,

Por el principio de superposición, podemos proceder en dos pasos

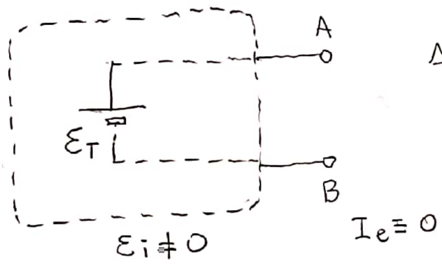


$$\Delta V = V_A - V_B = V_e \equiv -I_e R_T$$

$$R_T \equiv -\frac{V_e}{I_e} = \left|\frac{V_e}{I_e}\right|$$

1. apagamos todas las fuentes internas, $\mathcal{E}_i = 0 \ \forall i$. En un diagrama de circuito, esto equivale a reemplazar todas las fem por hilos conductores. Aplicamos una corriente externa $I_e \neq 0$
Esto define la resistencia equivalente R_T.
La diferencia de potencial en AB es $V_e = -I_e R_T$

2. Ahora eliminamos la corriente externa $(I_e = 0)$ y volvemos a colocar las fuentes internas $\mathcal{E}_i \neq 0$.



$$\Delta V_{AB} = V_A - V_B \equiv V_i \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_T \equiv V_i$$

Luego, para una corriente arbitraria I, la solución que nos da el potencial es la superposición de 1 y 2

$$V(I) = \mathcal{E}_T - R_T I \qquad \forall I.$$

Es decir que podemos reemplazar el circuito original por el equivalente $\mathcal{E}_T$, R_T ya que son indistinguibles.

En la practica:

- cortocircuitamos todas las fuentes y calculamos la resistencia equivalente entre A y B $\rightarrow R_T$
- resolvemos el circuito para encontrar el potencial ΔV_{AB}. (el resto no importa, con hallar ΔV_{AB} es suficiente y es posible que no necesite calcular todas las corrientes). Esto nos da $\mathcal{E}_T$.