Magnetostática - breve repaso

- Una corriente estacionaria genera un campo magnético estatico
- Un campo magnético produce una fuerza sobre cargas en movimiento, por ejemplo sobre hilos con corrientes.
- La fuerza de Lorentz es $\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}$
   - $\vec{F}_m \perp \vec{v} \Rightarrow$ no hace Trabajo.
- En presencia de campos electricos y magnéticos

(147.1) $$\boxed{\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v} \times \vec{B}}$$

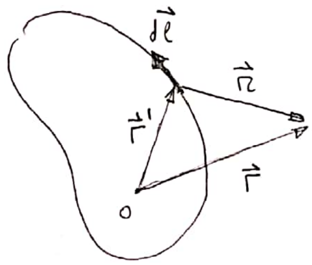
- La fuerza sobre una corriente

(147.2) $$\vec{F} = \int I\, d\vec{l} \times \vec{B} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$$ (hilo, corriente estacionaria)

(147.3) $$\vec{F} = \int \vec{K} \times \vec{B}\, ds$$ (corriente superficial)

(147.4) $$\vec{F} = \int \vec{J} \times \vec{B}\, dv$$ (corriente volumétrica)

- El campo generado por un hilo de corriente está dado por la ley de Biot - Savart:



(147.5) $$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{I}(\vec{r}\,') \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

donde como siempre $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

$\vec{r}\,'$ da la posición de la fuente de campo, en este caso un elemento infinitesimal de corriente $d\vec{I}(\vec{r}\,')$.

(147.6) $$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{1}{\mathscr{r}^2} \left(d\vec{l}\,' \times \hat{\mathscr{r}} \right)}$$ donde $d\vec{I}(\vec{r}\,') = I\, d\vec{l}(\vec{r}\,') = I\, d\vec{l}\,'$

Junto con el principio de superposición, esta expresión permite hallar el campo para una coleccion de corrientes arbitrarias.

Campos magnéticos de distribuciones de corriente

El elemento de corriente $d\vec{I}(\vec{r}')$ en la ec. (147.5) puede escribirse para corrientes distribuidas

$d\vec{I} = \vec{I}\, dl = I\, d\vec{l}$ hilo de corriente

$d\vec{I} = \vec{K}\, ds$ densidad superficial de corriente $\vec{K}$

$d\vec{I} = \vec{J}\, dv$ densidad volumétrica de corriente $\vec{J}$

Las integrales en cada caso son

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r^2} \left(\vec{I}(\vec{r}') \times \hat{r}\right) dl'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{1}{r^2} \left(\vec{K}(\vec{r}') \times \hat{r}\right) ds'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r^2} \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}\right) dv'$$

OJO: uno podría plantear que una carga puntual en movimiento es una "corriente" $q\vec{v}$ y escribir la fórmula

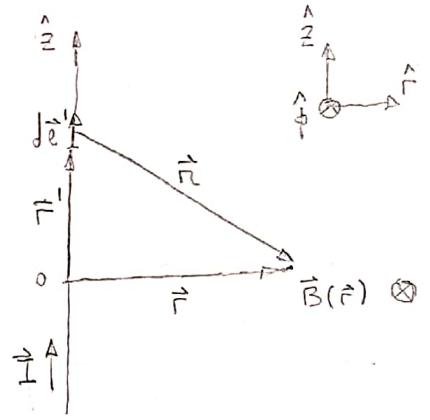
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

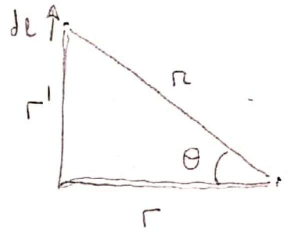
pero esta expresión es incorrecta.

Recordemos que la ley de Biot-Savart vale para corrientes estacionarias. No es el caso de la carga puntual!

Para cargas moviéndose lentamente ($v \ll c$, es decir lejos del regimen relativista) la formula es una buena aproximación. Pero que quede claro que no entra dentro de las condiciones de validez de la ley de Biot-Savart.

Ejemplo: el campo magnético de un hilo recto.





Por un hilo (en principio finito) circula una corriente estacionaria

Calculemos el campo $\vec B$ a una distancia $\vec r$ del hilo

Elegimos un sistema de coordenadas cilíndricas con $\hat z \parallel \vec I$

y el origen en el punto mas cercano del hilo a $\vec r$.

(149.1) $$\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot I \int \frac{1}{\mathcal{R}^2}\cdot \underbrace{d\vec l' \times \hat{\mathcal{R}}}_{=?}$$

En nuestro sistema de coordenadas:

$$d\vec l' = dl'\,\hat z$$

$$\vec r = r\,\hat r$$

$$\vec r' = r'\,\hat z$$

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec r - \vec r' = r\,\hat r - r'\,\hat z$$

$$d\vec l' \times \vec{\mathcal{R}} = dl'\,\hat z \times (r\,\hat r - r'\,\hat z) = r\,dl'\,\hat\phi \qquad (\hat z \times \hat z = 0\ ,\ \hat z \times \hat r = \hat \phi)$$

(149.2) $$\therefore\ d\vec l' \times \hat{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}}\,d\vec l' \times \vec{\mathcal{R}} = \frac{r}{\mathcal{R}}\,dl'\,\hat\phi = \frac{r}{\mathcal{R}}\,dz\,\hat\phi$$

- Ahora, mientras que r es cte. en la integral (149.1), $\mathcal{R}$ y z varían

$$\mathcal{R}\cos\theta = r \ \rightarrow\ \frac{r}{\mathcal{R}} = \cos\theta \quad ; \quad \frac{1}{\mathcal{R}^2} = \frac{1}{r^2}\cos^2\theta$$

$$\mathcal{R}\sin\theta = z$$

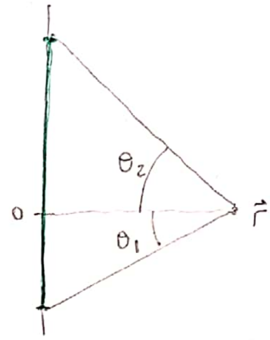
$$\Rightarrow\ z = r\,\mathrm{tg}\,\theta \ \rightarrow\ dz = r\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\mathcal{R}^2}\cdot d\vec l' \times \hat{\mathcal{R}} = \underbrace{\frac{1}{r^{\cancel{2}}}\,\cancel{\cos^2\theta}}\cdot\underbrace{\cos\theta}\cdot\underbrace{\cancel{r}\,\frac{d\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}}\,\hat\phi = \frac{1}{r}\cos\theta\,d\theta\,\hat\phi \quad \Big\}$$

como en otras ocasiones, resulta conveniente integrar en θ ...

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{r} \cos\theta \, d\theta \; \hat{\phi}$$

donde θ_1, θ_2 son los ángulos que delimitan la extensión del hilo (finito).



(150.1) $$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot \sin\theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

obs. Para casos particulares habrá que evaluar $\sin\theta_2$ y $\sin\theta_1$ en función de la geometría de la configuración.

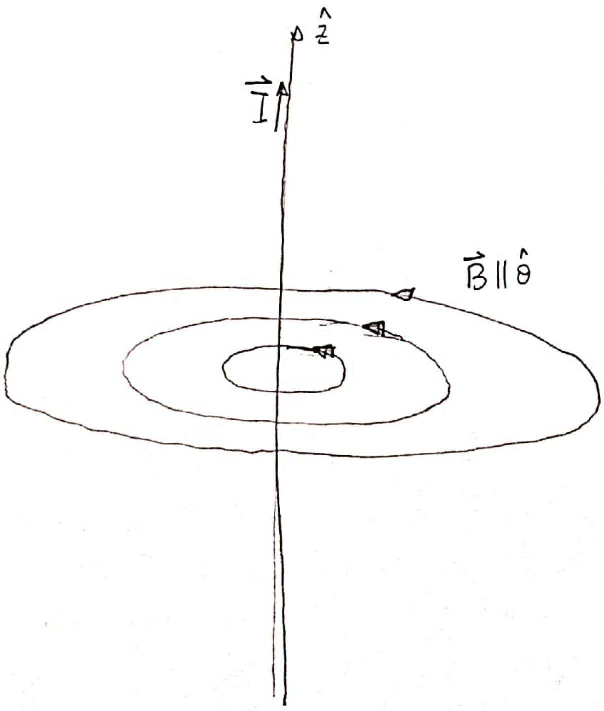
Es interesante el caso límite de un hilo infinito:

$\theta_1 \to -\pi/2$

$\theta_2 \to \pi/2$

(150.2) $$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}}$$

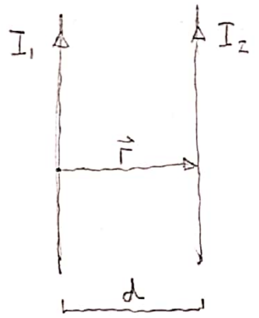
campo magnético de un hilo infinito de corriente estacionaria.



- las líneas del campo $\vec{B}$ son círculos concéntricos
- $B \sim 1/r$

Ejemplo: fuerza entre dos hilos de corriente.

Ahora que sabemos calcular el campo de un hilo (150.2) y la fuerza sobre un hilo (147.2) podemos calcular la fuerza entre dos hilos de corriente como en los experimentos de Oersted.



- por dos cables paralelos circulan corrientes I_1, I_2.
- están separados una distancia d.
- ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud entre los cables?
- calculemos la fuerza sobre el cable (2), $\vec{F}_{12}$

$$\vec{F}_{12} = \int I_2 \, d\vec{l} \times \vec{B}_1 \qquad \text{con} \qquad \vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \cdot \hat{\theta}$$

$$d\vec{l} = dl \, \hat{z} \qquad \text{y} \qquad \hat{z} \times \hat{\theta} = -\hat{r}$$

$$\vec{F}_{12} = \int I_2 \, dl \, \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{\theta}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} (-) \hat{r} \underbrace{\int dl}_{=L}$$

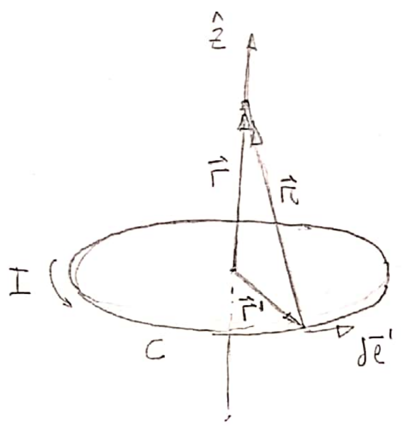
vemos que si el signo de I_1 e I_2 es el mismo, la fuerza es atractiva; y si es diferente, la fuerza será repulsiva.

$\int dl = L$ la longitud del segmento considerado.

La fuerza por unidad de longitud $f \equiv F/L$ es

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

Ejemplo: campo magnético sobre el eje de una espira por la que circula una corriente estacionaria.



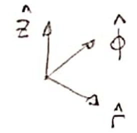
Evaluamos el campo $\vec{B}(\vec{r})$ sobre el eje $\hat{z}$.

$\vec{r} = z\,\hat{z}$ | $\vec{\mathcal{R}} = \vec{r} - \vec{r}\,' = z\,\hat{z} - R\,\hat{r}$

$\vec{r}\,' = R\,\hat{r}$ | $\mathcal{R}^2 = R^2 + z^2$

$d\vec{\ell}\,' = d\ell'\,\hat{\phi}$

en coordenadas cilíndricas con el origen en el centro de la espira.

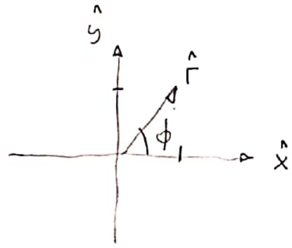


$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{1}{\mathcal{R}^2} \cdot d\vec{\ell}\,' \times \hat{\mathcal{R}}$$

$$d\vec{\ell}\,' \times \vec{\mathcal{R}} = d\ell'\,\hat{\phi} \times (z\,\hat{z} - R\,\hat{r}) = d\ell'\,z\,\hat{r} + d\ell'\,R\,\hat{z}$$

$\mathcal{R} = |\vec{\mathcal{R}}| = (R^2 + z^2)^{1/2}$ es constante en la integral.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}^3} \cdot \int (z\,d\ell'\,\hat{r} + R\,d\ell'\,\hat{z})$$



- $\int z\,d\ell'\,\hat{r} = z \int d\ell'\,\hat{r} = *$

$$\hat{r} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \quad , \quad d\ell' = R\,d\phi$$

$$* = z \cdot \int_0^{2\pi} R\,d\phi\,(\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y})$$

$$= zR \left\{ \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\phi\,d\phi}_{=0}\,\hat{x} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\phi\,d\phi}_{=0}\,\hat{y} \right\} = \vec{0}$$

- esto refleja la simetría de la configuración de corriente: para cada elemento de corriente hay otro elemento del otro lado de la espira que cancela la contribución a la componente $\hat{r}$ del campo. Como consecuencia $\vec{B} \parallel \hat{z}$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot R\,\hat{z} \cdot \underbrace{\oint_C d\ell'}_{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{z}$$

(152.1) $$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{z}}$$

Ley de Ampère. Ecs. de Maxwell para magnetostática.

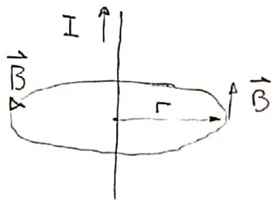
Vamos a calcular la div $\vec{B}$ y el rot $\vec{B}$. Por el teorema de Helmholtz sabemos que con estas ecuaciones diferenciales (junto con condiciones de contorno, por ejemplo $\vec{B} \to \vec{0}$ en ∞) el campo queda bien determinado.

La idea es análoga al plan que desarrollamos para la electrostática, donde de la ley de Coulomb y el principio de superposición derivamos las ecs. $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ y $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$.

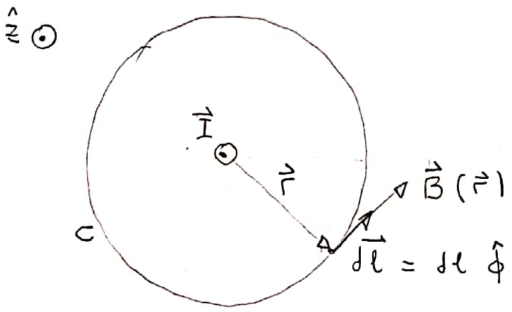
En electrostática siempre empezábamos por evaluar la situación más simple: una carga puntual.

En magnetostática, la configuración mas sencilla va a ser un hilo recto e infinito de corriente, como resolvimos hace un rato:

(153.1) $$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\phi}$$



Si miramos desde la perspectiva del eje $\hat{z}$:



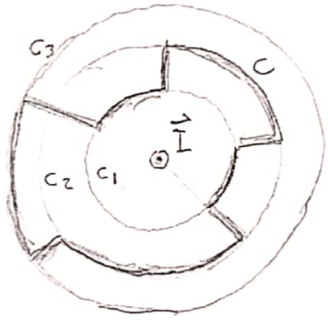
Vamos a calcular la integral de línea a lo largo de una curva C de radio constante r:

(153.2) $$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\phi} \cdot dl\,\hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \overbrace{\oint dl}^{2\pi r} = \mu_0 I.$$

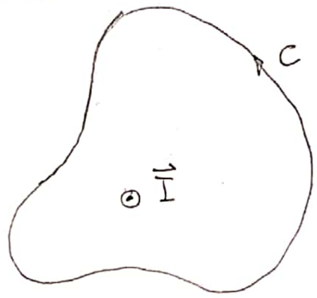
(153.3) $\therefore \oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I$

- es independiente de r: al alejarnos, $B \sim 1/r$ decrece y la longitud del camino crece $\sim r$.

Este resultado tan particular para un camino circular, en realidad es válido para cualquier camino que encierre el hilo de corriente una vez.



Por ejemplo para este camino formado por tramos circulares y radios entre ellos, la integral de línea no suma cuando nos movemos radialmente.



Lo mismo va a ser cierto para un camino arbitrario, que podemos descomponer en segmentos infinitesimales radiales y circulares.

Mas formalmente, si escribimos el $\vec{dl}$ en coordenadas cilíndricas:

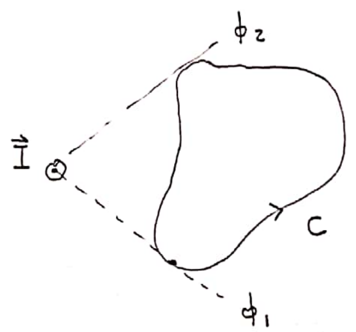
(154.1) $$\vec{dl} = dr\,\hat{r} + r\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

(154.2) $$\vec{B}\cdot\vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\phi}\cdot\left(dr\,\hat{r} + r\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}\right) \qquad \begin{cases} \hat{\phi}\cdot\hat{r} = 0 \\ \hat{\phi}\cdot\hat{z} = 0 \\ \hat{\phi}\cdot\hat{\phi} = 1 \end{cases}$$

(154.3) $$\vec{B}\cdot\vec{dl} = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{2\pi}}_{=\,cte.}\,d\phi$$

$$\therefore \oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint d\phi = \mu_0 I \qquad (154.4)$$

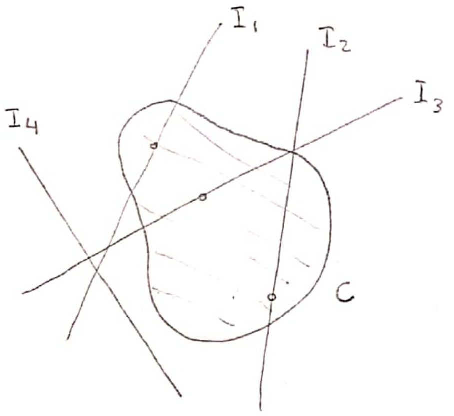
Por otro lado, si la curva C no encierra al hilo $\vec{I}$:



$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = 0. \qquad (154.5)$$

ya que la integral va de un angulo ϕ_1 a un angulo ϕ_2 y vuelve al mismo ϕ_1.

Si ahora consideramos un conjunto de hilos rectos infinitos



por el principio de superposición

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}} \qquad (155.1)$$

donde I_{enc} es la suma de las corrientes encerradas por el camino de circulación C.

Las corrientes no encerradas no contribuyen a (155.1) por (154.5)

Podemos escribir las corrientes en función de una distribución de corriente volumétrica $\vec{J}$ (los hilos cuentan como δ de Dirac)

de modo que

(155.2) $$I_{enc} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$ con S una superficie de borde C.

Entonces:

(155.3) $$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Por el teorema de Stokes,

(155.4) $$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

(155.5) $$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Como esto vale para cualquier superficie S, resulta

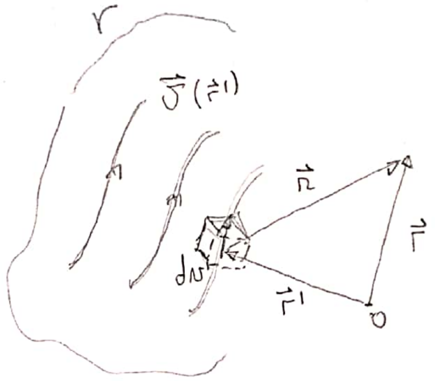
(155.6) $$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

En esta derivación empezamos con la expresión de $\vec{B}$ para hilos rectos e infinitos de corriente.

Vamos a generalizar esta ecuación mas adelante.

Comenzaremos con la ley de Biot - Savart:

(156.1) $$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{\eta^2} \vec{J}(\vec{r}\,') \times \hat{\eta}\, dv'$$



para una distribución espacial $\vec{J}(\vec{r}\,')$ de corriente.

Como siempre:

$\vec{\eta} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

La integral se calcula sobre las coordenadas primadas $\vec{r}\,'$.

Divergencia de $\vec{B}$. vamos a calcular primero $\nabla \cdot \vec{B}$

$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ y el operador ∇ deriva con respecto a $\vec{r}$.

(156.2) $$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \nabla \cdot \left(\vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\hat{\eta}}{\eta^2} \right) dv'$$

(156.3) $$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \qquad \text{(ver demo)}$$

(156.4) $\therefore$ $$\nabla \cdot \left(\vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\hat{\eta}}{\eta^2} \right) = \frac{\hat{\eta}}{\eta^2} \cdot \left(\nabla \times \vec{J}(\vec{r}\,') \right) - \vec{J}(\vec{r}\,') \cdot \left(\nabla \times \frac{\hat{\eta}}{\eta^2} \right)$$

(156.5) $\nabla \times \vec{J}(\vec{r}\,') = \vec{0}$ porque $\vec{J}$ no depende de $\vec{r}$.

(156.6) $\nabla \times \frac{\hat{\eta}}{\eta^2} = \vec{0}$ También. Veámoslo:

- una función $\vec{f} = f_r \hat{r} + f_\theta \hat{\theta} + f_\phi \hat{\phi}$ en esféricas, el rot.

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta\, f_\phi) - \frac{\partial f_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r}$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial f_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r f_\phi) \right) \hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r f_\theta) - \frac{\partial f_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$

si $\vec{f} = \frac{\hat{r}}{r^2} = f_r(r)\, \hat{r}$; $f_r(r)$ no depende ni de θ ni de ϕ

$\therefore$ $\nabla \times \vec{f} = \vec{0}$.

(156.7) $\therefore$ $$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$

$$\vec{A} = a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z}$$

$$\vec{B} = b_x\,\hat{x} + b_y\,\hat{y} + b_z\,\hat{z}$$

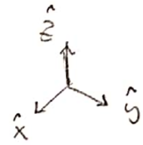
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\hat{x}\times\hat{x} = \hat{y}\times\hat{y} = \hat{z}\times\hat{z} = 0$$

$$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$$

$$\hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$$



$$\vec{A}\times\vec{B} = (a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z})\times(b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_z\hat{z})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,\hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{z}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \partial_x(a_y b_z - a_z b_y) + \partial_y(a_z b_x - a_x b_z) +$$

$$+ \partial_z(a_x b_y - a_y b_x) =$$

$$= (\partial_x a_y)\,b_z + a_y(\partial_x b_z) - (\partial_x a_z)\,b_y - a_z(\partial_x b_y)$$

$$+ (\partial_y a_z)\,b_x + a_z(\partial_y b_x) - (\partial_y a_x)\,b_z - a_x(\partial_y b_z)$$

$$+ (\partial_z a_x)\,b_y + a_x(\partial_z b_y) - (\partial_z a_y)\,b_x - a_y(\partial_z b_x)$$

$$= b_x(\partial_y a_z - \partial_z a_y) + b_y(\partial_z a_x - \partial_x a_z) + b_z(\partial_x a_y - \partial_y a_x)$$

$$+ a_x(\partial_y b_z - \partial_z b_y) - a_y(\partial_z b_x - \partial_x b_z) - a_z(\partial_x b_y - \partial_y b_x)$$

$$= \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$

Rotor de $\vec{B}$

. Aplicamos el rotor a la ley de Biot-Savart

$$(157.1) \quad \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left[\vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\hat{\eta}}{\eta^2} \right] dv'$$

Ahora tenemos el rotor de un producto vectorial:

$$(157.2) \quad \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

En nuestro caso $\vec{A} = \vec{J}(\vec{r}\,')$ no depende de $\vec{r}$ $\Rightarrow$ sus derivadas son ϕ.
Esto mata el primero y cuarto términos. Queda:

$$(157.3) \quad \nabla \times \left[\vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\hat{\eta}}{\eta^2} \right] = -\left(\vec{J}(\vec{r}\,') \cdot \nabla \right) \frac{\hat{\eta}}{\eta^2} + \vec{J}(\vec{r}\,') \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\eta}}{\eta^2} \right)$$

$\nabla \cdot \frac{\hat{\eta}}{\eta^2} = ??$ quizá me recuerden de exitos como F3 - Episodio I

ni mas ni menos que la delta de Dirac (ver p. 15 - 17)

$$(157.4) \quad \nabla \cdot \frac{\hat{\eta}}{\eta^2} = 4\pi\, \delta^3(\vec{\eta})$$

En cuanto al primer término en (157.3), vamos a tener que trabajar un poco más...

Vamos a considerar la integral de éste término

$$(157.5) \quad \int (-) \left(\vec{J}(\vec{r}\,') \cdot \nabla \right) \frac{\hat{\eta}}{\eta^2}\, dv = ?$$

y para poder integrar por Gauss, vamos a recurrir a el truco de reescribir la derivada : $\nabla \rightarrow \nabla'$

$$(157.6) \quad -\left(\vec{J}(\vec{r}\,') \cdot \nabla \right) \frac{\hat{\eta}}{\eta^2} = +\left(\vec{J}(\vec{r}\,') \cdot \nabla' \right) \frac{\hat{\eta}}{\eta^2}$$

podemos hacer este cambio de variable de derivación junto al cambio de signo porque $\vec{\eta} = \vec{r} - \vec{r}\,'$,
y $\partial_x f(x - x') = -\partial_{x'} f(x - x')$

Ahora, $\vec{J} \cdot \nabla'$ es un operador diferencial escalar que está actuando sobre el vector $(\hat{\eta}/\eta^2)$. Este vector tiene componentes $\left(\frac{\hat{\eta}}{\eta^2}\right)_\mu$ con $\mu = x, y, z$, cada una un campo escalar.

Resulta útil la identidad:

(158.1) $$\nabla\cdot(f\vec{A}) = f\,(\nabla\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot\nabla f$$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\nabla f = \nabla\cdot(f\vec{A}) - f\,(\nabla\cdot\vec{A})$$

en nuestro caso $\vec{A}=\vec{J}(\vec{r}\,')$ y el campo escalar $f=\left(\frac{\hat{n}}{n^2}\right)_\mu$ es cada una de las componentes por separado.

(158.2) $$\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\left(\frac{\hat{n}}{n^2}\right)_\mu = \nabla'\cdot\left[\left(\frac{\hat{n}}{n^2}\right)_\mu\vec{J}(\vec{r}\,')\right] - \left(\frac{\hat{n}}{n^2}\right)_\mu\cdot\left(\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}\,')\right)$$

Para una corriente estacionaria, tendremos (ec. 116.1)

(158.3) $$\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}\,') = 0$$

con lo que solo sobrevive el primer término: ecs. (157.5, 157.6, 158.2)

(158.4) $$\int_{\mathcal{V}}(-)\left(\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\nabla\right)\frac{\hat{n}}{n^2}\,dv' = \int_{\mathcal{V}}\nabla'\cdot\left(\left(\frac{\hat{n}}{n^2}\right)_\mu\vec{J}(\vec{r}\,')\right)dv' = * \qquad \forall\mu$$

y por el Teorema de Gauss tenemos para cada componente μ:

(158.5) $$* = \oint_S\left(\frac{\hat{n}}{n^2}\right)_\mu\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{s}$$

- Ahora que pudimos escribir la integral de esta manera, fíjense que el volumen $\mathcal{V}$ sobre el que está evaluada la integral (158.4) es el volumen que contiene la corriente $\vec{J}$ en la ley de Biot-Savart (156.1). La superficie S en (158.5) es la frontera, el borde, que encierra al volumen $\mathcal{V}$.

- Como $\vec{J}(\vec{r}\,')=\vec{0}$ fuera del volumen $\mathcal{V}$, podemos "expandir" el volumen de integración hacia fuera de la región que contiene la corriente: como $\vec{J}=\vec{0}$ allí, no cambia el valor de la integral (156.1). Y ahora viene lo lindo después de tanto remar: la superficie $\tilde{S}$ que rodea al volumen expandido $\tilde{\mathcal{V}}$ está fuera de la región que contiene la corriente, $\vec{J}=\vec{0}$ sobre $\tilde{S}$, con lo cual la integral (158.5) es nula: $*=0$.

Recapitulemos. <u>Ley de Ampére</u>.

Estamos calculando $\nabla \times \vec{B}$, ver ec. (157.1)

Reescribimos el rotor dentro de la integral y vimos que tiene dos términos, ec. (157.3).

La integral del primer término se anula (lo vimos recién) y el segundo término es $\vec{J}'$ x delta de Dirac, ec. (157.4).

Entonces, juntando las piezas:

(159.1) $$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}\,') \cdot 4\pi\, \delta^3(\vec{\imath})\, dv' \qquad \text{con } \vec{\imath} = \vec{r} - \vec{r}\,'$$

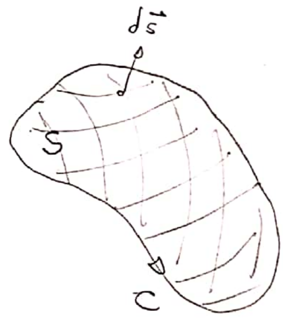
(159.2) $$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})}$$

Esta es la ec. que estabamos buscando.

Es la <u>ley de Ampére</u> en su forma diferencial.

Integrando en una superficie

(159.3) $$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{enc}$$



y usando el teorema de Stokes

(159.4) $$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Resulta la <u>forma integral</u> de la <u>ley de Ampere</u>

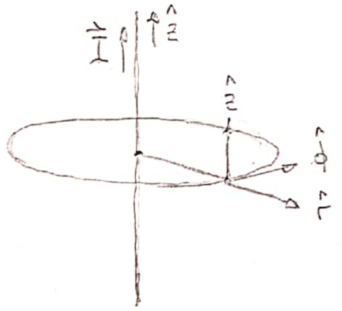
(159.5) $$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}}$$

donde I_{enc} es la corriente encerrada por la curva de circulación C.

Al igual que con el teorema de Stokes, debemos elegir una orientación para la superficie, y su relación con la circulación del borde. Usamos la regla de la mano derecha: si circulamos el borde en la dirección de los dedos, el pulgar define la dirección de una corriente positiva.

Ejemplo. El campo de un hilo recto por Ampère.

Consideremos un hilo de corriente estacionaria I, recto, infinito.



Empleamos un sistema de coordenadas cilíndricas para sacar provecho de las simetrías de la distribución de cargas.

En general el campo $\vec{B}(\vec{r})$ dependerá de las tres coordenadas y tendrá tres componentes:

(160.1) $$\vec{B}(\vec{r}) = B_r(r,\phi,z)\,\hat{r} + B_\phi(r,\phi,z)\,\hat{\phi} + B_z(r,\phi,z)\,\hat{z}$$

- Si desplazamos la distribución de corriente a lo largo del eje $\hat{z}$ ésta permanece invariante. Luego $\vec{B}$ no puede depender de z.
- Si rotamos la corriente un ángulo ϕ con respecto al eje $\hat{z}$ también permanece invariante $\Rightarrow$ $\vec{B}$ no depende de ϕ.

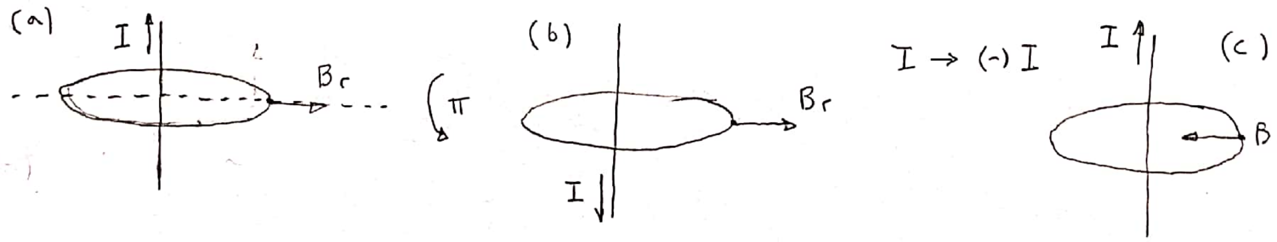
(160.2) $$\therefore \vec{B} = \vec{B}(r) = B_r(r)\,\hat{r} + B_\phi(r)\,\hat{\phi} + B_z(r)\,\hat{z}$$

- Por la ley de Biot-Savart

(160.3) $$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{d\vec{I}\times\hat{r}}{r^2}$$

como en la distribución de corriente $d\vec{I} = dI\,\hat{z} \parallel \hat{z}$ todos los elementos de corriente están alineados en $\hat{z}$ $\therefore$ $d\vec{B}\perp\hat{z}$ es decir $\vec{B}\perp\hat{z}$; con lo que el campo no puede tener una componente en la dirección $\hat{z}$: $B_z \equiv 0$.

- Imaginemos que el campo tiene una componente $B_r \neq 0$.



Una rotación de π alrededor de $\hat{r}$ invierte la corriente sin cambiar B_r; seguida de un cambio de signo en I que vuelve a invertir la corriente pero ahora invirtiendo B_r, por (160.3) al cabo de estas dos transformaciones la distribución de corrientes quedó invariante pero $B_r \to (-) B_r$.

Luego $B_r = 0$, la única componente posible es $B_\phi(r)$:

(161.1) $\vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(r)\,\hat{\phi} = B(r)\,\hat{\phi}$

Ahora que sabemos la pinta que tiene $\vec{B}$, podemos elegir una curva C que nos permita evaluar la integral de Ampère:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

en este caso elegimos una curva circular de radio r.

(161.2) $$\oint_{C(r)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B(r)\,\hat{\phi}\cdot dl\,\hat{\phi} = B(r).\overbrace{\oint dl}^{2\pi r}\ \overbrace{\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}}^{=1} = 2\pi r\, B(r)$$

La corriente encerrada por esta curva es $I_{enc} = I$.

$$2\pi r\, B(r) = \mu_0 I \qquad \therefore \qquad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(161.3) $$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\phi}}$$

Es el mismo resultado que obtuvimos por integración directa de la ley de Biot-Savart, ec. (150.2).