Electromagnetostatica.

(163.1) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ley de Gauss

(163.2) $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$

junto con la condición de contorno $\vec{E} \to \vec{0}$ lejos de las cargas $\equiv$ Coulomb + Superposición

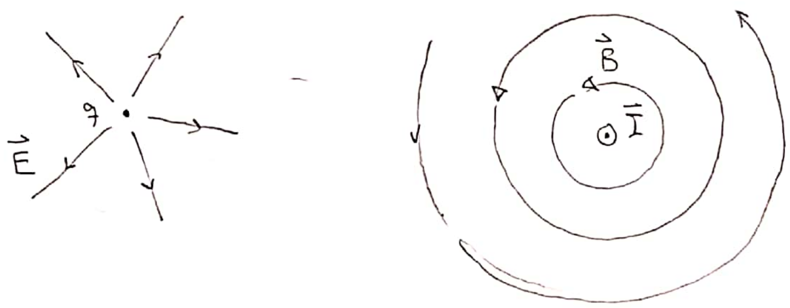
(163.3) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(163.4) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ ley de Ampère

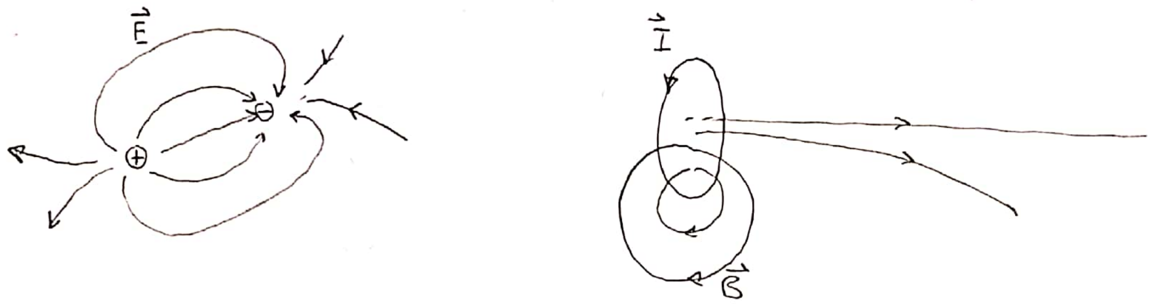
junto con la condición de contorno $\vec{B} \to \vec{0}$ lejos de las corrientes $\equiv$ Biot_Savart + Superposición

(163.5) $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ ley de la Fuerza.

El campo eléctrico emana de cargas eléctricas positivas, mientras que el campo magnetico se enrolla alrededor de las corrientes.



Las lineas de campo $\vec{E}$ nacen en cargas positivas y mueren en cargas negativas, mientras que las lineas de $\vec{B}$ forman caminos cerrados o se extienden hasta el infinito.



- $\nabla \cdot \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \nexists$ monopolos magneticos o cargas magnéticas.

Potencial magnético vectorial.

En electrostática, vimos que el campo eléctrico satisface

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

y esto nos permite introducir un campo escalar, que llamamos potencial $V(\vec{r})$, tal que

$$\vec{E} = -\nabla V(\vec{r})$$

Esto conduce a la formulación de leyes para el potencial, las ecuaciones de Poisson y Laplace y métodos de resolución.

En magnetostática tenemos

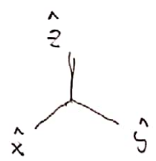
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

y esto nos va a permitir introducir un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ que llamaremos potencial vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Cualquier campo vectorial de divergencia nula, como $\vec{B}(\vec{r})$, puede escribirse como el rotor de un potencial vector (Teorema).

Para demostrarlo, vamos a construir las componentes de un vector $\vec{A}$



$$\vec{A}(\vec{r}) = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

de manera que $\nabla \times \vec{A} = \vec{B} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right) \times \left(a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}\right)$$

$\frac{\partial}{\partial \mu} \equiv \partial_\mu$

$$= (\partial_y a_z - \partial_z a_y)\hat{x} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z)\hat{y} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x)\hat{z}$$

Podemos escribir tres ecuaciones diferenciales escalares

$$(1) \quad \partial_y a_z - \partial_z a_y = b_x$$

$$(2) \quad \partial_z a_x - \partial_x a_z = b_y$$

$$(3) \quad \partial_x a_y - \partial_y a_x = b_z$$

Una manera de resolver y hallar las componentes $a_\mu(x,y,z)$ es primero elegir $a_x(x,y,z) \equiv 0$. En este caso podemos integrar las ecuaciones (2) y (3), que se reescriben como:

$$(2): \quad \frac{\partial a_z}{\partial x} = -b_y = -b_y(x,y,z)$$

$$(3): \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = b_z = b_z(x,y,z)$$

Recordemos que $\vec{B}(x,y,z)$ es conocido. Integrando con respecto a la variable x:

$$(4) \quad a_z(x,y,z) = -\int_0^x b_y(x',y,z)\,dx' + C_y(y,z)$$

$$(5) \quad a_y(x,y,z) = +\int_0^x b_z(x',y,z)\,dx' + C_z(y,z)$$

Las constantes de integración $C_y(y,z)$, $C_z(y,z)$ son constantes con respecto a x pero pueden depender de las otras variables y,z. Las soluciones (4) y (5) satisfacen las ecs. (2) y (3). Nos falta determinar las constantes, para que satisfagan además (1):

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = b_x(x,y,z)$$

Reemplazando las soluciones:

$$-\int_0^x \frac{\partial}{\partial y} b_y(x',y,z)\,dx' + \frac{\partial}{\partial y} C_y(y,z) - \int_0^x \frac{\partial}{\partial z} b_z(x',y,z)\,dx' - \frac{\partial}{\partial z} C_z(y,z)$$

$$= b_x(x,y,z)$$

$$-\int_0^x \left(\frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) dx' + \frac{\partial C_y}{\partial y} - \frac{\partial C_z}{\partial z} = b_x(x,y,z)$$

Ahora recordamos $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \implies \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0.$

$$\therefore \quad -\left(\frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial b_x}{\partial x}$$

$$\int_0^x \frac{\partial b_x}{\partial x'}(x', y, z)\, dx' + \frac{\partial c_y}{\partial y} - \frac{\partial c_z}{\partial z} = b_x(x, y, z)$$

$$\cancel{b_x(x, y, z)} - b_x(0, y, z) + \frac{\partial c_y}{\partial y} - \frac{\partial c_z}{\partial z} = \cancel{b_x(x, y, z)}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial c_y}{\partial y} - \frac{\partial c_z}{\partial z} = b_x(0, y, z) .$$

Acá tenemos cierta libertad para terminar de definir las "const."

elejimos $c_z(y, z) = 0$, con lo que

$$c_y(y, z) = \int_0^y b_x(0, y', z)\, dy' .$$

Recapitulando, hemos construido un campo vectorial $\vec{A}(x, y, z)$ definido como: $\vec{A} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$ con

$$a_x(x, y, z) = 0$$

$$a_y(x, y, z) = \int_0^x b_z(x', y, z)\, dx'$$

$$a_z(x, y, z) = -\int_0^x b_y(x', y, z)\, dx' + \int_0^y b_x(0, y', z)\, dy'$$

Por construcción, satisface $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$, pero también podemos comprobarlo calculando el rotor explícitamente, recordando que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

Entonces, la ecuación $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ implica la existencia de un potencial vector $\vec{A}$ tal que:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Como la divergencia de un rotor siempre es nula, esta formulación garantiza implícitamente que

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Prop: para cualquier campo $\vec{F} = f_x \hat{x} + f_y \hat{y} + f_z \hat{z}$

(167.1) $$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 .$$

Dem. $\nabla \equiv \partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y} + \partial_z \hat{z}$

$$\nabla \times \vec{F} = (\partial_y f_z - \partial_z f_y)\hat{x} + (\partial_z f_x - \partial_x f_z)\hat{y} + (\partial_x f_y - \partial_y f_x)\hat{z}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \partial_x(\partial_y f_z - \partial_z f_y) + \partial_y(\partial_z f_x - \partial_x f_z) + \partial_z(\partial_x f_y - \partial_y f_z)$$

$$= \partial_{xy} f_z - \partial_{xz} f_y + \partial_{yz} f_x - \partial_{yx} f_z + \partial_{zx} f_y - \partial_{zy} f_z \equiv 0 .$$

¿Como se escribe la ecuación de Ampere en la formulación potencial?

(167.2) $$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

si escribimos $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

(167.3) $$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

(167.4) $$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

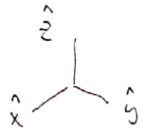
Vieron que durante la construcción de la prueba $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ hicimos algunas elecciones. Hay una ambigüedad en la definición del potencial vector. Es análoga a la que sucedía en electrostática con el potencial escalar $V(\vec{r})$: como $\vec{E} = -\nabla V$, podemos sumar cualquier constante a $V(\vec{r})$ sin cambiar el campo $\vec{E}$.
En el caso del potencial vector pasa algo similar:
podemos sumar cualquier función vectorial de rotor nulo:

(167.5) si $\vec{A}'$ es tal que $\nabla \times \vec{A}' = \vec{0}$ y $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\Rightarrow \nabla \times (\vec{A} + \vec{A}') = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{A}' = \vec{B} + \vec{0} = \vec{B} .$$

- como sabemos por nuestra experiencia electrostática, el grad. de un campo escalar tiene rotor nulo:

(167.6) $$\vec{E} = -\nabla V \iff \nabla \times \vec{E} = \nabla \times (-\nabla V) = \vec{0} .$$



prop. $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$.

dem. $\vec{F} = f_x \hat{x} + f_y \hat{y} + f_z \hat{z}$

$\nabla = \partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y} + \partial_z \hat{z}$

$\nabla \times \vec{F} = (\partial_y f_z - \partial_z f_y)\hat{x} + (\partial_z f_x - \partial_x f_z)\hat{y} + (\partial_x f_y - \partial_y f_x)\hat{z}$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \left[\partial_y(\partial_x f_y - \partial_y f_x) - \partial_z(\partial_z f_x - \partial_x f_z)\right]\hat{x}$$

$$+ \left[\partial_z(\partial_y f_z - \partial_z f_y) - \partial_x(\partial_x f_y - \partial_y f_x)\right]\hat{y}$$

$$+ \left[\partial_x(\partial_z f_x - \partial_x f_z) - \partial_y(\partial_y f_z - \partial_z f_y)\right]\hat{z}$$

$\partial_\mu \partial_\nu = \partial_{\mu\nu}$

$$= (\partial_{yx} f_y - \partial_{yy} f_x - \partial_{zz} f_x + \partial_{zx} f_z)\hat{x} \qquad \pm \partial_{xx} f_x \hat{x}$$

$$+ (\partial_{zy} f_z - \partial_{zz} f_y - \partial_{xx} f_y + \partial_{xy} f_x)\hat{y} \qquad \pm \partial_{yy} f_y \hat{y}$$

$$+ (\partial_{xz} f_x - \partial_{xx} f_z - \partial_{yy} f_z + \partial_{yz} f_y)\hat{z} \qquad \pm \partial_{zz} f_z \hat{z}$$

$\partial_{\mu\nu} = \partial_{\nu\mu}$

$$= (\partial_{xx} f_x + \partial_{xy} f_y + \partial_{xz} f_z)\hat{x} - (\partial_{xx} f_x + \partial_{yy} f_x + \partial_{zz} f_x)\hat{x}$$

$$+ (\partial_{yx} f_x + \partial_{yy} f_y + \partial_{yz} f_z)\hat{y} - (\partial_{xx} f_y + \partial_{yy} f_y + \partial_{zz} f_y)\hat{y}$$

$$+ (\partial_{zx} f_x + \partial_{zy} f_y + \partial_{zz} f_z)\hat{z} - (\partial_{xx} f_z + \partial_{yy} f_z + \partial_{zz} f_z)\hat{z}$$

$\partial_{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial_\nu ..)$

$$= \partial_x(\partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z)\hat{x} - \nabla^2 f_x \hat{x}$$

$$+ \partial_y(\partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z)\hat{y} - \nabla^2 f_y \hat{y}$$

$$+ \partial_z(\partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z)\hat{z} - \nabla^2 f_z \hat{z}$$

$$= \partial_x(\nabla \cdot \vec{F})\hat{x} + \partial_y(\nabla \cdot \vec{F})\hat{y} + \partial_z(\nabla \cdot \vec{F})\hat{z} - \nabla^2 \vec{F}$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \qquad \square.$$

Podemos usar esta ambiguedad para simplificar la expresión de la ley de Ampere para el potencial vector, la ec. (167.4).

Una elección común es:

(168.1) $$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

conocida como "medida de Coulomb" o "calibre Coulombiano" o en inglés: Coulomb gauge.

¿Como sabemos que esta elección es siempre posible, y compatible con la ambiguedad que describimos?

Supongamos que tenemos un potencial vector $\vec{A}_0$ cuya divergencia no es nula, es decir $\nabla \cdot \vec{A}_0 \neq 0$.

Podemos sumar el gradiente de un campo escalar $\lambda(\vec{r})$

(168.2) $$\vec{A} \equiv \vec{A}_0 + \nabla \lambda$$

ya que como dijimos $\nabla \times (\nabla \lambda) = \vec{0}$ y por lo tanto esto no afectará el campo magnético $\vec{B}$. La divergencia de este nuevo potencial vector es:

(168.3) $$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}_0 + \nabla^2 \lambda$$

Vemos que para conseguir un $\vec{A}$ tal que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, debemos encontrar un $\lambda(\vec{r})$ tal que:

(168.4) $$\nabla^2 \lambda = - \nabla \cdot \vec{A}_0$$

Este problema nos resulta familiar, ya que en electrostática hemos tratado con la ec. de Poisson:

(168.5) $$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En nuestro nuevo problema, $\nabla \cdot \vec{A}_0$ juega el papel de la distribución de cargas ρ/ε_0. Conocemos la solución

(168.6) $$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{\mathscr{r}} \rho(\vec{r}\,') \, d\tau'$$

para ρ acotada en el espacio ($\rho \to 0$ en ∞)

De manera similar, podemos escribir:

(169.1) $$\lambda(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} (\nabla \cdot \vec{A}_0)\, dv'$$

siempre que $\nabla \cdot \vec{A}_0$ caiga a cero en el infinito. (Si no es así, hay que encontrar λ por otros medios, en forma similar a lo que sucedía en electrostática).

Luego, siempre es posible encontrar $\lambda(\vec{r})$ y hacer $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

Otra manera de verlo es que

(169.2) $$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

especifica el rotor del campo $\vec{A}$ pero no pone ninguna condición a la divergencia, y por lo tanto estamos en libertad de elegir su forma.

Con la elección $\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$ la ec. (167.4) queda

(169.3) $$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

Esta es la expresión de la ley de Ampére para el potencial vectorial. Son tres ecuaciones de Poisson! Una para cada coordenada. Y de nuevo, sabemos como tratar este problema:

(169.4) $$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r} \vec{J}(\vec{r}\,')\, dv'}$$

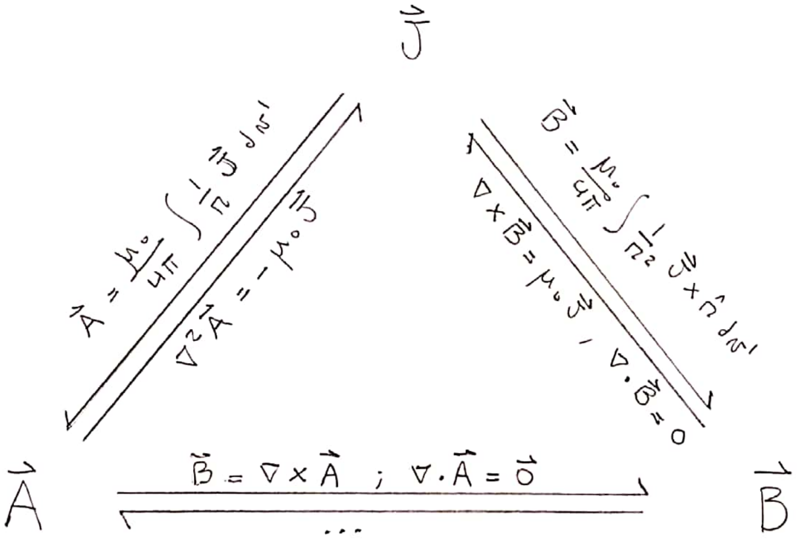
También tenemos expresionses similares para distribuciones de corriente superficiales y lineales:

(169.5) $$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r} \vec{K}(\vec{r}\,')\, da'} \quad \text{y} \quad \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r} \vec{I}\, dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{1}{r}\, d\vec{l}\,'}$$

<u>observación</u>: en la práctica el potencial vector no es tan útil; a diferencia de $V(\vec{r})$ que es un escalar, requiere resolver tres componentes y luego un rotor. Sin embargo tiene gran importancia teórica, como iremos viendo.

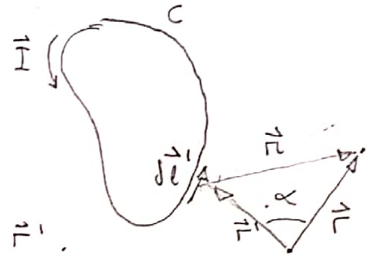
Resumen Magnetostática.

- $\vec{J}(\vec{r})$ distribución de corrientes estacionaria
- $\vec{B}(\vec{r})$ campo magnético
- $\vec{A}(\vec{r})$ potencial vector



Expansión multipolar del potencial vector.

La ec. (169.4) para el vector potencial



(171.1) $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{\mathscr{r}} \vec{J}(\vec{r}')\, d\tau'$$

contiene la función $\frac{1}{\mathscr{r}}$, donde rec. $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}'$.

Por lo tanto, a grandes distancias de la distribución de corrientes se puede hacer un desarrollo en serie de potencias de $1/r$.

Como vimos anteriormente (p. 29 – 30), ec. (30.4)

(171.2) $$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n \cdot P_n(\cos\alpha)$$

donde $P_n(x)$ son los polinomios de Legendre

α es el ángulo formado por $\vec{r}$ y $\vec{r}'$, de modo que $\cos\alpha = \hat{r} \cdot \hat{r}'$

Así, para un lazo de corriente definido por un circuito C por el que circula una corriente estacionaria I

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \oint \frac{1}{\mathscr{r}}\, d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \oint_C (r')^n\, P_n(\cos\alpha)\, d\vec{l}'$$

Escribimos los términos explícitamente:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Big\{ \frac{1}{r} \oint_C d\vec{l}' \qquad \rightarrow \text{monopolo}$$

$$+ \frac{1}{r^2} \oint_C r' \cos\alpha\; d\vec{l}' \qquad \rightarrow \text{dipolo}$$

$$+ \frac{1}{r^3} \oint_C (r')^2\, \frac{1}{2}(3\cos^2\alpha - 1)\, d\vec{l}' \qquad \rightarrow \text{cuadrupolo}$$

$$+ \ldots \Big\} \qquad \vdots$$

El término monopolar se anula siempre: $\oint_C d\vec{l} \equiv \vec{0}$.

Esto es consecuencia directa de $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

La contribución dominante es entonces el término dipolar (siempre que no se anule, claro)

(172.1) $$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cdot \oint_c r' \cos\alpha \, d\vec{l}'$$

como $\vec{r} \cdot \vec{r}' = r r' \cos\alpha \rightarrow \hat{r} \cdot \vec{r}' = r' \cos\alpha$

(172.2) $$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cdot \oint_c (\hat{r} \cdot \vec{r}')\, d\vec{l}'$$

Se puede reescribir la integral de una manera más reveladora. Usamos un corolario del Teorema de Stokes que dice que para un campo escalar $U(\vec{r})$,

$$\oint_c U(\vec{r})\, d\vec{l} = -\int_S \nabla U \times d\vec{s}$$

en particular eligiendo $U(\vec{r}) = \vec{c} \cdot \vec{r}$, con $\vec{c}$ un vector cte., resulta (prescindiendo de las primas en la notación)

$$\oint_c U\, d\vec{l} = \oint_c (\vec{c} \cdot \vec{r})\, d\vec{l} = -\int_S \nabla(\vec{c} \cdot \vec{r}) \times d\vec{s}$$

El gradiente $\nabla(\vec{c} \cdot \vec{r})$ se puede reescribir

$$\vec{c} = c_x \hat{x} + c_y \hat{y} + c_z \hat{z}$$

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

$$\nabla = \partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y} + \partial_z \hat{z}$$

$$\nabla(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \nabla(c_x x + c_y y + c_z z) =$$

$\vec{c}$ es cte.

$$= c_x \nabla(x) + c_y \nabla(y) + c_z \nabla(z)$$

$$= c_x \hat{x} + c_y \hat{y} + c_z \hat{z}$$

$$\nabla(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \vec{c}.$$

Luego,

$$\oint_c (\vec{c} \cdot \vec{r})\, d\vec{l} = -\int_S \vec{c} \times d\vec{s} = -\vec{c} \times \int_S d\vec{s}$$

En particular, si elegimos la constante $\vec{c} = \hat{r}$

$$\oint_c (\hat{r} \cdot \vec{r}')\, d\vec{l}' = -\hat{r} \times \int_S d\vec{s}'$$

Podemos introducir un vector de superficie $\vec{S}$

(173.1) $$\vec{S} \equiv \int_S d\vec{s}$$

Con lo que (rec. $\hat{r} \times \vec{S} = - \vec{S} \times \hat{r}$)

(173.2) $$\oint_C (\hat{r} \cdot \vec{r}\,') \, d\vec{\ell}\,' = \vec{S} \times \hat{r}$$

(173.3) $$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \, \vec{S} \times \hat{r}$$

Definimos el <u>momento dipolar magnético</u> $\vec{m}$:

(173.4) $$\boxed{\vec{m} \equiv I \int_S d\vec{s} = I \vec{S}}$$

(173.5) $$\boxed{\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}}$$

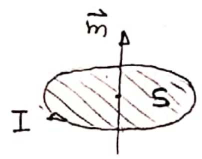
- <u>obs</u>: para un lazo de corriente plano, todos los $d\vec{s}$ son paralelos y $|\vec{S}|$ es el área del lazo.

- <u>obs 2</u>: el momento dipolar magnético es independiente del origen de coordenadas, ec. (173.4). Se acuerdan que el momento dipolar eléctrico podía depender del origen si el término monopolar no es cero. Bueno, el monopolo magnético <u>siempre</u> es cero.

- <u>obs 3</u>: si $\vec{m} \neq \vec{0}$, el término dipolar (173.5) domina la expansión multipolar para grandes distancias. Puede ser una buena aproximación, pero <u>no</u> es exacto: además puede haber correcciones cuadrupolares y de orden superior.

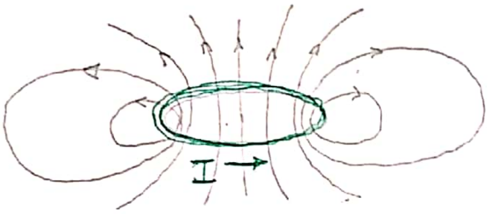
- <u>obs 4</u>: dipolo magnético ideal.

Un dipolo magnético puro ó ideal se define tomando el límite en el que el área del lazo de corriente va a cero y la corriente que circula por él se va a infinito, de manera que $\vec{m}$ sea constante:



$$\lim \begin{array}{l} S \to 0 \\ I \to \infty \\ m = I S = \text{cte.} \end{array}$$

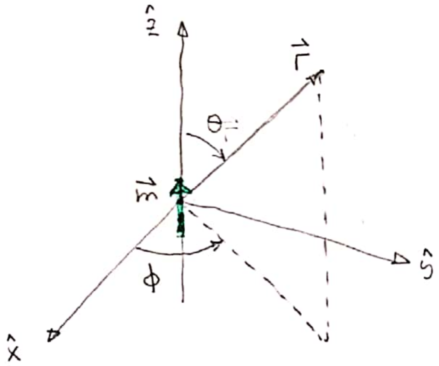
• obs 5: dipolo magnético físico.



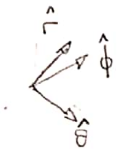
Campo magnético de un dipolo ideal. (en el origen)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2}$$

• consideremos un dipolo $\vec{m}$ en el origen, y elegimos un sistema de coordenadas esféricas con el eje $\hat{z} \parallel \vec{m}$:



$$\vec{m} = m\,\hat{z}$$



(r, θ, ϕ)

$$\vec{m}\times\hat{r} = m\,\hat{z}\times\hat{r} = m\sin\theta\,\hat{\phi}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m\sin\theta}{r^2}\,\hat{\phi} \qquad \equiv A_\phi(r,\theta)\,\hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,A_\phi) - \cancel{\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}}\right]\hat{r}$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\cancel{\frac{\partial A_r}{\partial\phi}} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi)\right]\hat{\theta}$$

$$+\frac{1}{r}\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta)} - \cancel{\frac{\partial A_r}{\partial\theta}}\right]\hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,m\cdot\left\{\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)\hat{r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\hat{\theta}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{m}{r\sin\theta}\left[\frac{1}{r^2}\,2\cdot\sin\theta\cos\theta\,\hat{r} - \sin^2\theta\,(-)\,\frac{1}{r^2}\,\hat{\theta}\right]$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}$$

obs: podemos reescribir esta expresión en forma vectorial independiente del sistema de coordenadas:

$$m\,(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}) =$$

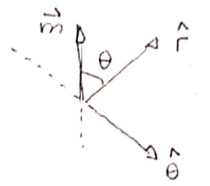
$$= 2m\cos\theta\,\hat{r} + m\sin\theta\,\hat{\theta} \quad (\pm m\cos\theta\,\hat{r})$$

$$= 3m\cos\theta\,\hat{r} + (-m\cos\theta\,\hat{r} + m\sin\theta\,\hat{\theta}) = *$$

si proyectamos $\vec{m}$ en sus componentes en un sistema polar $\hat{r}, \hat{\theta}$:

$$\vec{m} = (\vec{m}\cdot\hat{r})\,\hat{r} + (\vec{m}\cdot\hat{\theta})\,\hat{\theta}$$

$$= m\cos\theta\,\hat{r} - m\sin\theta\,\hat{\theta}$$



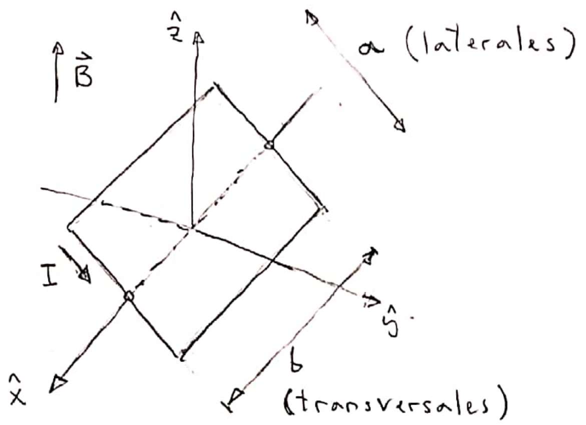
además, $\vec{m}\cdot\hat{r} = m\cos\theta$.

$$* = 3(\vec{m}\cdot\hat{r})\,\hat{r} - \vec{m}$$

$$\boxed{\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left(3(\vec{m}\cdot\hat{r})\,\hat{r} - \vec{m}\right)}$$

Dipolo en un campo magnético: Torque y fuerza.

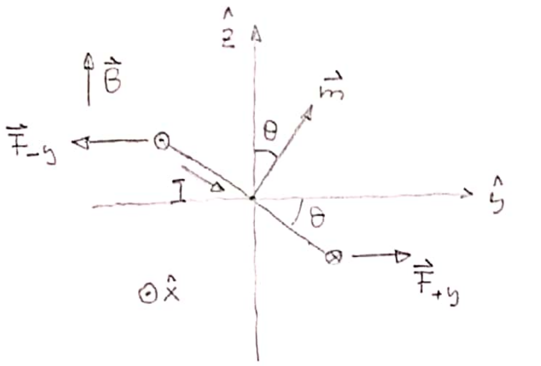
Imaginemos una espira de corriente rectangular, de lados a y b, en un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Supongamos que $\vec{B}$ apunta en la dirección del eje z, $\vec{B} = B\,\hat{z}$. Por la espira circula I.

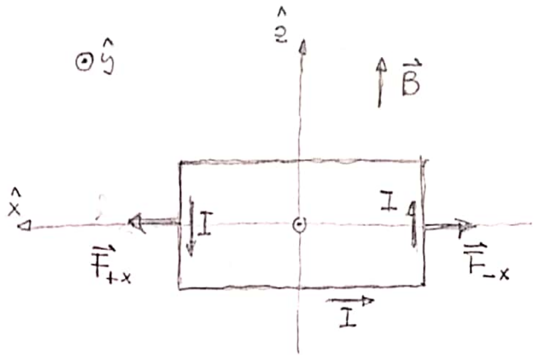


caso general: descomponer en espiras rectangul.

La espira se encuentra orientada de modo que sus lados b están alineados con el eje $\hat{x}$, y puede girar con respecto a los puntos medios de los lados a. Supongámosla inclinada con respecto a $\hat{z}$ un angulo θ: $\hat{s}\cdot\hat{z} = \cos\theta$

Vista desde el eje $\hat{x}$:





Sobre cada tramo del circuito hay una fuerza magnética dada por la ec. (147.2):

$$\vec{F}_{\mu} = I \int_{\mu} d\vec{l} \times \vec{B} \qquad \text{para cada segmento } \mu : \pm x, \pm y$$

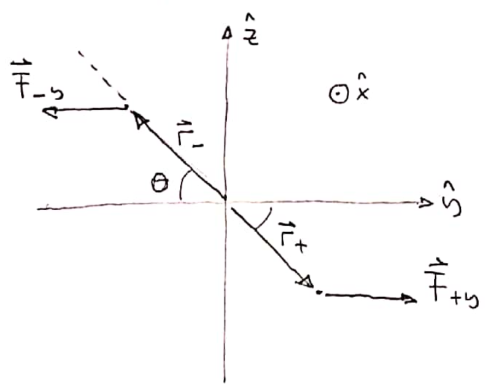
Las fuerzas sobre los laterales, $\vec{F}_{\pm x}$ son opuestas y de igual magnitud. Se anulan entre sí y tienden a "estirar" el rectángulo (si no fuera rígido):

$$\vec{F}_{\pm x} = \pm I a B \hat{x}$$

En los lados transversales (de longitud b, paralelos a $\hat{x}$) las fuerzas también son opuestas y de igual magnitud, pero estas ejercen un torque.

$$\vec{F}_{+y} = I\left(\int_{+y} d\vec{l}\right) \times \vec{B} = I(-b\hat{x} \times B\hat{z}) = IbB\,\hat{y}$$

$$\vec{F}_{-y} = I\left(\int_{-y} d\vec{l}\right) \times \vec{B} = I(+b\hat{x} \times B\hat{z}) = IbB\,(-)\,\hat{y}$$



$$\vec{\tau}_+ = \vec{r}_+ \times \vec{F}_{+y} = \frac{1}{2} a F_{+y} \sin\theta \,\hat{x}$$

$$\vec{\tau}_- = \vec{r}_- \times \vec{F}_{-y} = \frac{1}{2} a F_{-y} \sin\theta \,\hat{x}$$

El torque neto es

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_+ + \vec{\tau}_- = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} a\, IbB \sin\theta\,\hat{x} = I(ab)B\sin\theta\,\hat{x}$$

$ab = S$ el área del circuito y $Iab = m$ su momento dipolar magnético.

(177.1) $\vec{\tau} = m\,B\,\sin\theta\;\hat{x}$

(177.2) $\boxed{\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}}$

obs: la fuerza neta en un campo uniforme es nula

$$\vec{F} = \vec{F}_{+x} + \vec{F}_{-x} + \vec{F}_{+y} + \vec{F}_{-y} = \vec{0}.$$