Repaso.

Magnetostática.

(1) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(2) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (Ampére) $\rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$

(3) $\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$ (fuerza de Lorentz)

(4) $\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int \frac{1}{\mathscr{r}^2} \left(\vec{J}(\vec{r}\,') \times \hat{\mathscr{r}} \right) d\tau'$ (Biot-Savart)

Potencial vector

(5) $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \iff \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (6)

(7) $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (medida de Coulomb)

(8) $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ (ecs. de Poisson para el pot. vector)

(9) $\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int_V \frac{1}{\mathscr{r}} \vec{J}(\vec{r}\,')\, d\tau'$

(10) $\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int_S \frac{1}{\mathscr{r}} \vec{K}(\vec{r}\,')\, ds'$

(11) $\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I \displaystyle\int_L \frac{1}{\mathscr{r}} d\vec{l}\,'$

Expansión multipolar de $\vec{A}(\vec{r})$.

(12) $\vec{m} \equiv I \displaystyle\int_S d\vec{s} = I \vec{S}$ momento dipolar magnético

(13) $\vec{A}_1(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}$ potencial de un dipolo

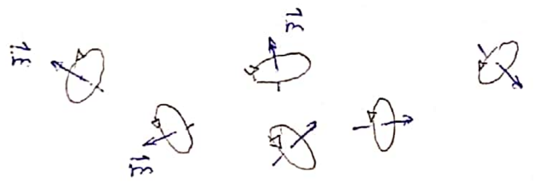
(14) $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ Torque sobre un dipolo

(15) $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$ fuerza sobre un dipolo

Medios magnéticos.

Si examinamos un material magnético a nivel microscópico nos encontramos con corrientes pequeñas generadas por electrones que orbitan los núcleos de sus átomos y que "giran" sobre sí mismos.

Normalmente, estas corrientes minúsculas están orientadas al azar dentro del material, cancelándose mutuamente.



Los lazos de corriente son tan pequeños y a nivel macroscópico podemos considerarlos como mini-dipolos magnéticos.

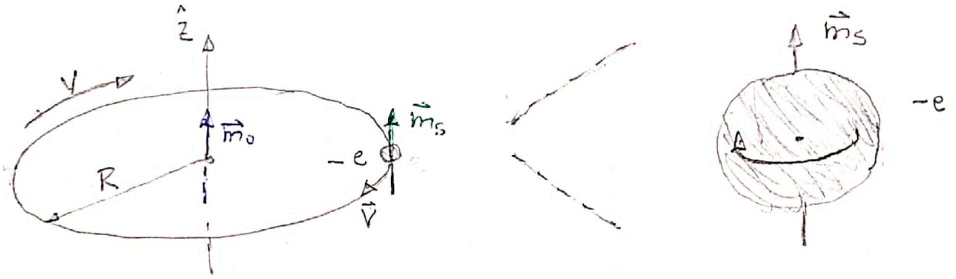
Si colocamos el material en un campo magnético, aparecerán torques $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ que alinearán, al menos parcialmente, los dipolos con el campo, produciendo una magnetización del medio: el medio se polariza magnéticamente.

Existen diversas formas de polarización magnética:

- paramagnetismo: polarización paralela a $\vec{B}$ externo
- diamagnetismo: polarización anti-paralela a $\vec{B}$
- ferromagnetismo: magnetización permanente, dependiente de la historia del material.

Paramagnetismo y diamagnetismo.

Los electrones de un átomo, orbitando alrededor de su núcleo, tienen dos formas de momento magnético: spin y orbital.



Spin y paramagnetismo.

Pueden imaginarse al electrón como una pequeña esfera cargada que gira sobre un eje. Esto da lugar a corrientes minúsculas que generan un momento magnético de spin $\vec{m}_s$. {esta es una imagen clásica

En un átomo, los electrones se agrupan de a pares con spines opuestos, de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli. Se trata de un fenómeno cuántico que escapa la teoría del electromagnetismo clásico que abarca esta materia.

Como consecuencia, el momento magnético de espín suele cancelarse de a pares, salvo en átomos con un número impar de electrones, en los que el electrón sobrante no es cancelado por ningún otro.

En átomos y moléculas con electrones impares, al colocarlos en un campo magnético su spin se alineará parcialmente con el campo (a menos de fluctuaciones térmicas).

Esto es lo que sucede en los materiales paramagnéticos: el campo externo $\vec{B}$ ejerce un torque $\vec{\tau}_s = \vec{m}_s \times \vec{B}$ sobre los dipolos de spin $\vec{m}_s$ de los electrones que hay dentro del material. A nivel macroscópico, este alineamiento parcial de los momentos de spin resulta en una magnetización del material.

Momento dipolar orbital y diamagnetismo.

Además de girar sobre sí mismos, los electrones orbitan alrededor del núcleo atómico.

Imaginemos una orbita circular de radio R, y supongamos que el electrón recorre la orbita con una velocidad v.

Si bien se trata de una carga puntual, en movimiento, el tiempo que tarda el electron en completar la órbita es muy breve

$T = \frac{2\pi R}{v}$ el período de la órbita

y podemos aproximar el movimiento como una corriente

$I = \frac{-e}{T}$ la cantidad de carga que pasa por un punto de la órbita en el tiempo T.

$$I = -\frac{ev}{2\pi R}$$

Como la órbita tiene un area $S = \pi R^2$

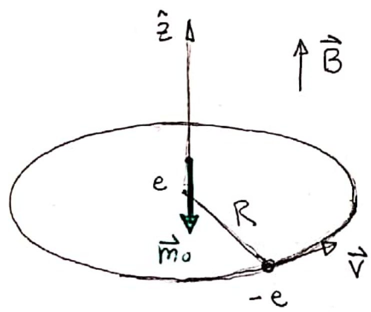
si suponemos que está alineada con $\hat{z}$, $\vec{S} = \pi R^2 \hat{z}$

El momento dipolar magnético orbital es

$$\vec{m}_o = I \vec{S} = -\frac{1}{2} evR \hat{z}$$

En principio, también hay un torque $\vec{\tau}_o = \vec{m}_o \times \vec{B}$ sobre los dipolos orbitales $\vec{m}_o$. Sin embargo resulta que este no es el efecto más relevante de la aplicación de un campo $\vec{B}$ en este caso.

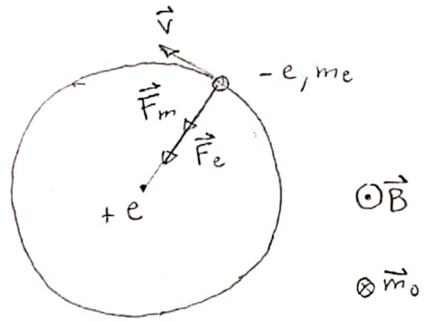
Dependiendo de la orientación de $\vec{B}$, la fuerza magnética puede hacer que la velocidad orbital aumente o disminuya!



Imaginemos la órbita orientada como en el dibujo.

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = -evB\hat{r}$$

En ausencia del campo magnético $(B=0)$ la fuerza eléctrica da lugar a una aceleración centrípeta:



(1) $$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2} = m_e \frac{v_0^2}{R}$$

donde m_e es la masa del electrón.

Si prendemos un campo $\vec{B} = B\,\hat{z}$

(2) $$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{R^2} + e v_1 B = m_e\frac{v_1^2}{R}$$ donde v_1 es la nueva velocidad orbital, y el radio R no cambia.

Restando estas ecuaciones (2) − (1)

(3) $$e v_1 B = m_e\frac{v_1^2}{R} - m_e\frac{v_0^2}{R} = \frac{m_e}{R}\cdot(v_1^2 - v_0^2)$$ vemos que $v_1 > v_0$

(4) $$e v_1 B = \frac{m_e}{R}(v_1+v_0)(v_1-v_0)$$

Si el cambio es pequeño, $v_1 \sim v_0$ y $v_1 - v_0 \equiv \delta v$

podemos aproximar $v_1 + v_2 \simeq 2v_0$, $v_1 \simeq v_0$

$$e\,\cancel{v_0}\,B \simeq \frac{m_e}{R}\cdot 2\,\cancel{v_0}\,\delta v$$

(5) $$\therefore\ \delta v = \frac{eRB}{2m_e}.$$

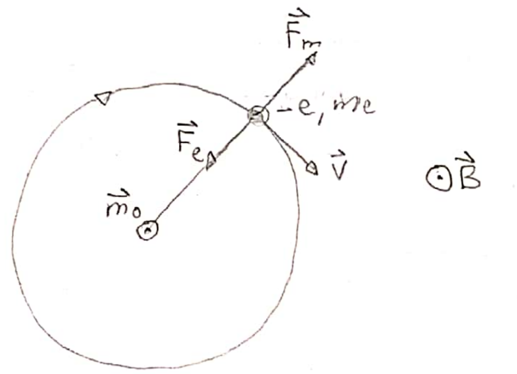
Es decir que el electrón orbita con mayor rapidez, el cambio δv es proporcional a B, y tiene como consecuencia un cambio en la corriente efectiva y por lo tanto en el momento dipolar orbital

(6) $$\delta\vec{m}_o = -\frac{1}{2}e\,\delta v\,R\,\hat{z} = -\frac{e^2R^2B}{4m_e}\hat{z} = -\frac{e^2R^2}{4m_e}\vec{B}$$

El <u>cambio</u> en $\vec{m}_o$ es <u>opuesto</u> a la <u>dirección de $\vec{B}$</u>.

En este caso resultó un aumento en m_o, ya que $\vec{m}_o \sim (-)\hat{z}$

Si por el contrario suponemos una orbita en el sentido horario $(\vec{v} \to -\vec{v})$ el momento magnetico estara alineado (paralelo) a $\vec{B}$. Pero la fuerza magnética será hacia afuera de la órbita, resultando en una disminución de la velocidad orbital ($\delta v < 0$) y por lo tanto en un <u>$\delta\vec{m}$ también opuesto</u> al campo magnético aplicado $\vec{B}$:



$$\vec{m}_0 = \frac{1}{2} e v R \,\hat{z}$$

$$\vec{F}_m = -e\vec{v}\times\vec{B} = evB\,\hat{r}$$

- Es decir que el cambio $\delta\vec{m}_0$ en el momento dipolar orbital siempre se opone a $\vec{B}$.

- Al colocar un material en un campo magnético, las órbitas electrónicas están en general desordenadas, no alineadas con el campo externo. Sin embargo todos los momentos orbitales experimentan un cambio opuesto a $\vec{B}$. Esto resulta en un momento dipolar macroscópico antiparalelo a $\vec{B}$, un fenómeno llamado <u>diamagnetismo</u>.

  El efecto suele ser muy débil y en general es dominante el paramagnetismo. Pero en átomos con número par de electrones se puede observar un diamagnetismo macroscópico.

<u>Algunas críticas:</u> Una suposición clave en la ec. (182.2) es que el radio de la órbita no cambia. Si bien podría mostrarse que esto es válido en alguna circunstancia especial (átomo estacionario, campo gradualmente encendido), tengamos en cuenta que

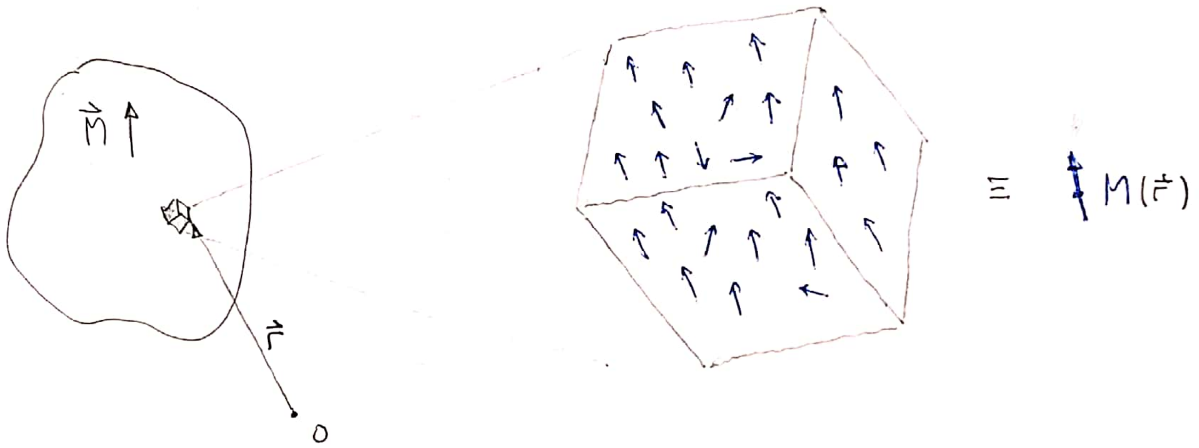
(i) estamos hablando de una situación <u>no</u> electro-magnetostática; el tratamiento riguroso del problema va a tener que esperar. Se puede suponer que v permanece cte. y R cambia: se obtiene un resultado similar.

(ii) El diamagnetismo es en realidad un fenómeno cuántico.

Magnetización.

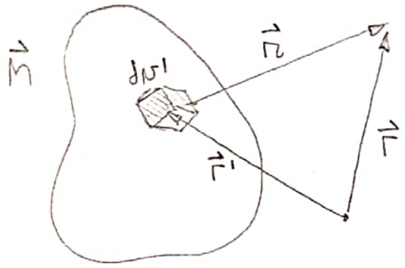
- Recapitulando un poco. Independientemente de los mecanismos microscópicos, la fenomenología nos dice que los materiales se magnetizan en presencia de un campo magnético.
- Discutimos el paramagnetismo, que pensamos como la alineación paralela al campo de los momentos de spin; y el diamagnetismo, que pensamos como una reducción antiparalela al campo de los momentos orbitales.
- En cualquier caso, vamos a introducir un <u>vector Magnetización</u>

<u>Def:</u> <u>$\vec{M}$</u>: momento dipolar magnético por unidad de volumen.
que describe el estado de polarización magnética de un material.



- Vamos a seguir una estrategia similar a la que empleamos con los dieléctricos, con $\vec{M}$ jugando el rol de $\vec{P}$.
- No nos vamos a preocupar como se produce $\vec{M}$, vamos a suponer que $\vec{M}$ está dado y vamos a calcular el campo producido por un cuerpo magnetizado.

Corrientes de magnetización.



- Consideramos un material con una magnetización conocida $\vec{M}(\vec{r})$.
- El momento dipolar magnético de un pequeño elemento de volumen $d\tau'$ es $d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}')\, d\tau'$

La clase pasada calculamos el potencial vector $\vec{A}(\vec{r})$ para un dipolo $\vec{m}$: (ver ec. (173.5))

(185.1) $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{\imath}}{\imath^2}$$

En el material tenemos $d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}')\, d\tau'$.

Para hallar el potencial vector generado por el cuerpo

(185.2) $$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{\imath}}{\imath^2}\, d\tau'}$$

Si bien esta <u>es</u> la solución, se la puede reescribir de una manera que resulta esclarecedora. y útil!

Como vimos anteriormente (p. 96)

(185.3) $$\nabla'\left(\frac{1}{\imath}\right) = \frac{\hat{\imath}}{\imath^2}$$

con lo cual podemos escribir

(185.4) $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\vec{M}(\vec{r}') \times \nabla'\left(\frac{1}{\imath}\right)\right] d\tau'$$

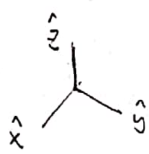
para re-expresar esta integral, primero aplicamos la expresión para el rotor de un campo $(\varphi \vec{A})$

(185.5) $$\nabla \times (\varphi \vec{A}) = \varphi\, \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times (\nabla \varphi)$$

donde $\varphi(\vec{r})$ es un campo escalar

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$



$$\nabla \times (\varphi \vec{A}) = \left(\partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y} + \partial_z \hat{z}\right) \times \left(\varphi A_x \hat{x} + \varphi A_y \hat{y} + \varphi A_z \hat{z}\right)$$

$$= \left[\partial_y(\varphi A_z) - \partial_z(\varphi A_y)\right]\hat{x}$$

$$+ \left[\partial_z(\varphi A_x) - \partial_x(\varphi A_z)\right]\hat{y}$$

$$+ \left[\partial_x(\varphi A_y) - \partial_y(\varphi A_x)\right]\hat{z}$$

$$= \left[\partial_y\varphi \cdot A_z + \varphi\, \partial_y A_z - \partial_z\varphi \cdot A_y - \varphi\, \partial_z A_y\right]\hat{x}$$
$$+ \left[\partial_z\varphi \cdot A_x + \varphi\, \partial_z A_x - \partial_x\varphi \cdot A_z - \varphi\, \partial_x A_z\right]\hat{y}$$
$$+ \left[\partial_x\varphi \cdot A_y + \varphi\, \partial_x A_y - \partial_y\varphi \cdot A_x - \varphi\, \partial_y A_x\right]\hat{z}$$

$$= \varphi\left[(\partial_y A_z - \partial_z A_y)\hat{x} + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)\hat{y} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\hat{z}\right]$$
$$+ (\partial_y\varphi \cdot A_z - \partial_z\varphi \cdot A_y)\hat{x}$$
$$+ (\partial_z\varphi \cdot A_x - \partial_x\varphi \cdot A_z)\hat{y}$$
$$+ (\partial_x\varphi \cdot A_y - \partial_y\varphi \cdot A_x)\hat{z}$$

$$= \varphi(\nabla \times \vec{A}) + (\nabla\varphi) \times \vec{A}$$

$$= \varphi(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\nabla\varphi) \quad \rightarrow \quad \vec{A} \times (\nabla\varphi) = \varphi(\nabla \times \vec{A}) - \nabla \times (\varphi\vec{A})$$

En la integral (185.4), $\vec{A} \equiv \vec{M}$ y $\varphi \equiv 1/r$

(186.1) $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{r}\left(\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')\right) dv' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{r}\right) dv'$$

Por un corolario del Teorema de la divergencia:

(186.2) $$\int_{V} (\nabla \times \vec{V})\, dv' = -\oint_S \vec{V} \times d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \int \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}'}{r}\right) dv' = -\oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{r} \times d\vec{s} = -\oint_S \frac{1}{r}\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}\, ds$$

(186.3) $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{r}\left(\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')\right) dv' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{1}{r}\left(\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}\right) ds'$$

La expresión (186.3) tiene dos términos.

El primero es el potencial vector debido a una distribución de corriente volumétrica

(187.1) $$\boxed{\vec{J}_m \equiv \nabla \times \vec{M}}$$ (corriente de magnetización volumétrica)

El segundo es el potencial debido a una corriente superficial

(187.2) $$\boxed{\vec{K}_m \equiv \vec{M} \times \hat{n}}$$ (corriente de magnetización superficial)

donde $\hat{n}$ es el vector normal a la superficie S que encierra al volumen $\mathcal{V}$.

Con estas corrientes así definidas

(187.3) $$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mathcal{R}} \vec{J}_m(\vec{r}\,') \, d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{1}{\mathcal{R}} \vec{K}_m(\vec{r}\,') \, ds'}$$

Es decir que el potencial vector $\vec{A}(\vec{r})$, y a través de éste el campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, de un objeto magnetizado es igual al producido por una distribucion volumetrica de corriente $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$ sumada a una corriente superficial $\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n}$.

En la práctica, tenemos dos opciones:

(1) integrar los dipolos magnéticos infinitesimales que componen el objeto, ec. (185.2)

(2) calcular primero estas corrientes de magnetización (187.1,2) y luego calcular el campo que éstas producen.