# Repaso.

(188.1) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(188.2) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (Ampére)

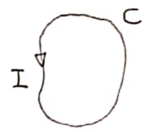
(188.3) $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ (Potencial vector)

(188.4) $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (medida Coulomb)

(188.5) $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ ; $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{r} \frac{1}{\text{ᴙ}} \vec{J}(\vec{r}\,') \, d\tau'$ (188.6)

Dipolo magnético:

(188.7) $\vec{m} = I \int_S d\vec{s}$ $\quad S = \partial C$




(188.8) $\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}$ (potencial de un dipolo en el origen)

## Medios magnéticos

- $\vec{M}$ es momento dipolar por unidad de volumen $\equiv$ lo llamamos magnetización del medio

(188.9) $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{r} \frac{1}{\text{ᴙ}^2} \left( \vec{M}(\vec{r}\,') \times \hat{\text{ᴙ}} \right) d\tau'$ (potencial de un objeto magnetizado, con $\vec{M}$ conocido.

Corrientes de magnetización:

(188.10) $\boxed{\vec{J}_m(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}}$ (volumétrica)

(188.11) $\boxed{\vec{K}_m(\vec{r}) = \vec{M} \times \hat{n}}$ (superficial)


(188.12) $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{r} \frac{1}{\text{ᴙ}} \vec{J}_m(\vec{r}\,') \, d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{1}{\text{ᴙ}} \vec{K}_m(\vec{r}\,') \, ds'}$

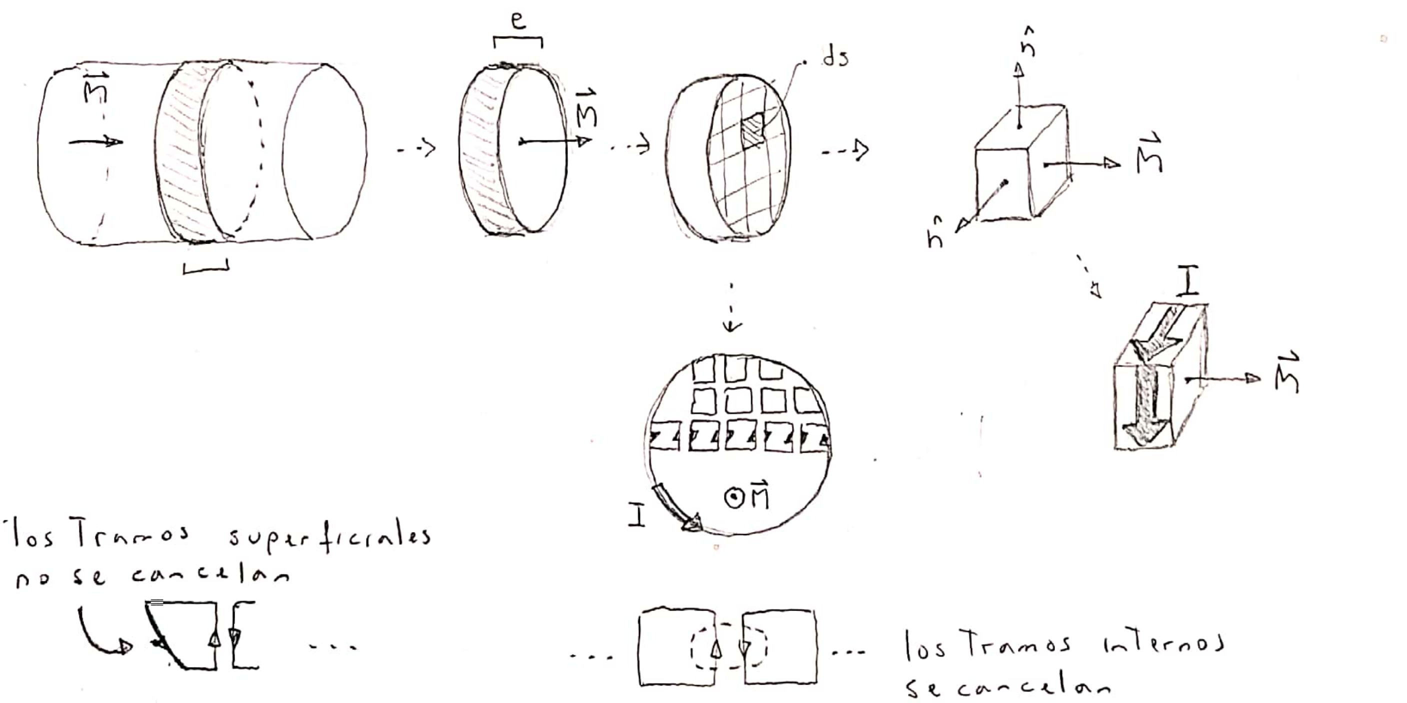
# Origen físico de las corrientes de magnetización.

En medios dieléctricos, en electrostática, habíamos introducido cargas de polarización $\rho_p \equiv -\nabla\cdot\vec{P}$ y $\sigma_p \equiv \vec{P}\cdot\hat{n}$. Vimos que estas cargas tienen origen en los pequeños desplazamientos que experimentan las distribuciones de carga a nivel atómico y molecular. La deformación de las nubes de electrones y la orientación de dipolos eléctricos producen cambios locales que a nivel macroscópico aparecen como distribuciones de carga en la superficie ($\sigma_p$) y en el volumen ($\rho_p$) del dieléctrico.


obs: la carga $\sigma_{p+}$ que se distribuye del lado izquierdo no viene desde el lado derecho, sino que es consecuencia de pequeños desplazamientos.

En el caso de las corrientes de magnetización $\vec{J}_m$ y $\vec{K}_m$ ocurre algo similar. Si bien las ecuaciones (188.10-12) son una forma de reescribir la ec. (188.9), las corrientes dadas por (188.10) y (188.11) tienen un origen físico.

- Imaginemos un material magnetizado uniformemente, es decir el vector $\vec{M}$ es uniforme dentro del material.



Consideremos una rodaja del material magnetizado, de espesor $\underline{e}$.
Podemos subdividir la rodaja en pequeñas cajas, con tapas de area $ds$.
Estas cajitas serán pequeños dipolos y tendrán un momento dipolar magnético

$$m = M e \, ds$$

Si representamos los dipolos como pequeños lazos de corriente, vemos que los lados adyacentes se cancelan entre sí y solo sobrevive la corriente que circula por los tramos que se encuentran en la superficie del material.

- Es decir que el resultado de las corrientes microscópicas de las cajitas es una corriente macroscópica que circula por la superficie de la rodaja (y del objeto en su totalidad).

<u>obs</u>: Los portadores de carga no circulan libremente por la superficie del material, solo realizan desplazamientos <u>locales</u>, que sumados dan como resultado una corriente superficial.

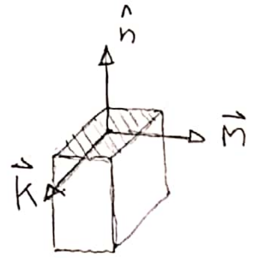
Volviendo a las cajitas de momento dipolar $m$, la corriente $I$ que circula por sus lados permite escribir el momento

$$m = I \, ds$$

$$\therefore \quad I \, ds = M e \, ds \quad \Rightarrow \quad I = M e$$

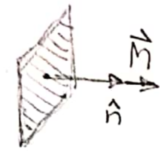
lo que nos deja una corriente superficial:

$$K = \frac{I}{e} = M$$




que podemos escribir vectorialmente como

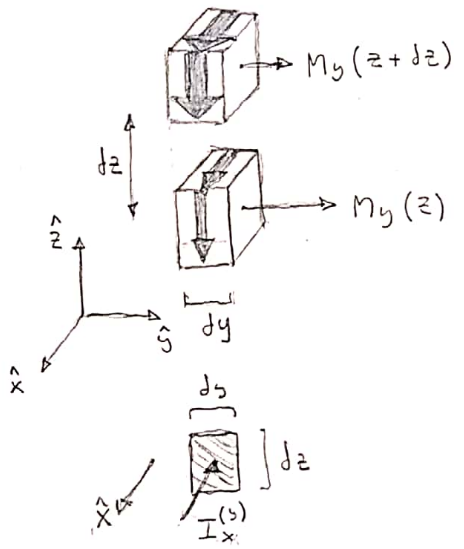
$$\boxed{\vec{K} = \vec{M} \times \hat{n}} \quad \text{como } (188.11)$$

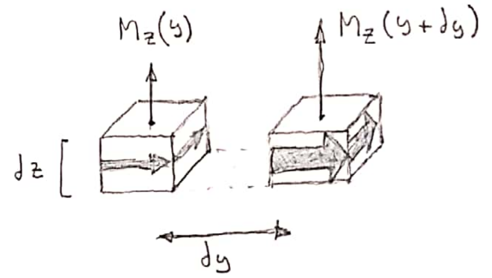



- <u>obs</u>: en las tapas de las cajitas $\vec{M} \parallel \hat{n} \Rightarrow \vec{K} = \vec{0}$.

- Supongamos ahora que la magnetización no es uniforme. Es decir $\vec{M} = \vec{M}(\vec{r})$.

Si $\vec{M}$ depende de la posición, las corrientes microscópicas de dipolos adyacentes ya no se cancelan:




Consideremos primero la componente $\hat{y}$ de la magnetización. La corriente que circula por los lados de las cajitas es

$$I = M_y \, dy$$

En la cara compartida va a haber una corriente.

$$I_x^{(y)} = -M_y(z+dz)\,dy + M_y(z)\,dy$$

{ la corriente de la cajita $(z+dz)$ "vuelve" en la dirección $(-\hat{x})$ mientras que en la cajita $(z)$ "viene" en la dirección $\hat{x}$.

$$I_x^{(y)} = -\left(M_y(z+dz) - M_y(z)\right)\,dy$$

$$I_x^{(y)} = -\frac{\partial M_y}{\partial z}\,dy\,dz$$

Para la componente $\hat{z}$ de la magnetización

$$I_x^{(z)} = M_z(y+dy)\,dz - M_z(y)\,dz$$

$$= \left(M_z(y+dy) - M_z(y)\right)\,dz$$

$$I_x^{(z)} = \frac{\partial M_z}{\partial y}\,dy\,dz$$

Luego, la componente neta de la corriente en la dirección $\hat{x}$

$$I_x = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right)dy\,dz$$

con lo que la densidad volumétrica de corriente en $\hat{x}$ es

(192.1) $$J_x = \frac{I_x}{ds} = \frac{I_x}{dy\,dz} = \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right)$$

Repitiendo el argumento para las otras componentes, obtenemos

(192.2) $$\boxed{\vec{J} = \nabla \times \vec{M}}$$ como en (188.10)

## El campo $\vec{H}$ y la ley de Ampére en materiales magnetizados.

Vimos que la consecuencia de una magnetización $\vec{M}$ es la aparición de corrientes de magnetización:

(192.3) $$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad \text{y} \quad \vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n}$$

Estas corrientes generan un campo magnético que podemos calcular por ejemplo mediante (188.12).

Supongamos ahora que tenemos un material magnetizado y además, corrientes adicionales, que llamaremos <u>corrientes libres</u> ya que no están atadas (ligadas) a ningun átomo o molécula.

Escribimos la densidad de corriente total $\vec{J}$ como la suma

(192.4) $$\boxed{\vec{J} = \vec{J}_\ell + \vec{J}_m}$$

La ley de Ampére es

(192.5) $$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{J}_\ell + \vec{J}_m)$$

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) = \vec{J}_\ell + \vec{J}_m = \vec{J}_\ell + \nabla \times \vec{M} \qquad \text{(por 192.3)}$$

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) - \nabla \times \vec{M} = \vec{J}_\ell$$

(192.6) $$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_\ell$$

Introducimos el <u>campo $\vec{H}$</u>

(192.7) $$\boxed{\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}}$$

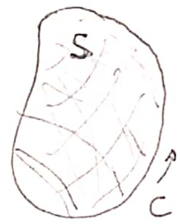
La ley de Ampère para $\vec{H}$ resulta

(193.1) $$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_\ell}$$

donde $\vec{J}_\ell$ es la densidad de corriente libre.

Empleando el Teorema del rotor podemos obtener su versión integral

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{J}_\ell \cdot d\vec{s} = I_{\ell enc}$$




(193.2) $$\boxed{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\ell enc}}$$

Siempre que conozcamos las corrientes libres y la simetría lo permita, podemos calcular $\vec{H}$ mediante (193.2) sin necesidad de conocer la magnetización $\vec{M}$.

**Warning.** La ec. (193.1) nos da el rotor de $\vec{H}$ pero no determina completamente el campo vectorial. Para eso hay que conocer $\nabla \cdot \vec{H}$. Si bien $\nabla \cdot \vec{B} = 0$,

$$\nabla \cdot \vec{H} = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \vec{B} - \nabla \cdot \vec{M} = - \nabla \cdot \vec{M}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{H} = - \nabla \cdot \vec{M}}$$

y en general $\nabla \cdot \vec{M} \neq 0$.

En definitiva, $\vec{H}$ no es un campo, como $\vec{B}$, de divergencia nula.

obs: en la práctica, cuando nos piden calcular $\vec{B}$ o $\vec{H}$ en presencia de materiales magnéticos, primero buscamos simetría que nos permitan emplear la ec. (193.2) para obtener $\vec{H}$. Las simetrías amigables para (193.2) son: cilíndrica, plana, solenoidal, Toroidal. (*)

En caso de no haber simetría, hay que calcular los campos de otra manera.

(*) en los casos con simetría, $\nabla \times \vec{H}$ solo alcanza para determinar $\vec{H}$ indicando que debe ser $\nabla \cdot \vec{H} = 0$.

# Medios magnéticos lineales.

En los medios paramagnéticos y diamagnéticos, se genera una magnetización $\vec{M}$ al aplicar un campo externo que alinea o altera los dipolos microscópicos.

En los medios lineales, la respuesta de magnetización es proporcional al campo aplicado:

(194.1) $$\boxed{\vec{M} = \chi \vec{H}}$$

donde $\chi$ es una constante llamada susceptibilidad magnética.

- NOTACIÓN: voy a omitir el subíndice "m" y llamarla $\chi$ en vez de $\chi_m$ ya que por contexto sabemos que estamos hablando de magnetismo.
- CONVENCIÓN: ¿Se acuerdan como se introducía la susceptibilidad eléctrica $\chi_e$? $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$.
  La magnetización se expresa con respecto a $\vec{H}$ (y no a $\vec{B}$).
- diamagnetismo : $\chi < 0$
  paramagnetismo : $\chi > 0$

De la ecuación (192.7)

(194.2) $$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

reemplazando la relación $\vec{M} = \chi \vec{H}$ para medios lineales

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$$

es decir

(194.3) $$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$$

con permeabilidad magnética

(194.4) $$\boxed{\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi)}$$

En el vacío $\chi = 0$ y $\mu = \mu_0$ es la permeabilidad del espacio libre (o vacío).

Atenti: aunque el medio sea lineal $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ no implica $\nabla \cdot \vec{H} = 0$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\mu \vec{H}) = \mu (\nabla \cdot \vec{H}) + \vec{H} \cdot \nabla \mu \qquad \text{si } \mu = \mu(\vec{r}),\ \nabla \mu \neq 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{H} = -\frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot \vec{H} = -\frac{1}{\mu^2} \nabla \mu \cdot \vec{B} = \nabla\left(\frac{1}{\mu}\right) \cdot \vec{B}$$

observación: en la práctica, es interesante saber que en un material lineal homogeneo

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times (\chi \vec{H}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{homogéneo}}}{=} \chi (\nabla \times \vec{H}) = \chi \vec{J}_\ell \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{J}_m = \chi \vec{J}_\ell}$$