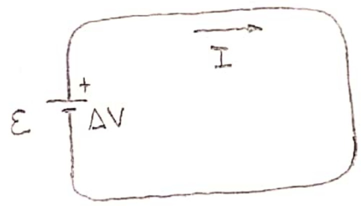
Fuerza electromotriz (f.e.m.)

Imaginemos un circuito por el que circula una corriente estacionaria:



- supongamos una batería ΔV.

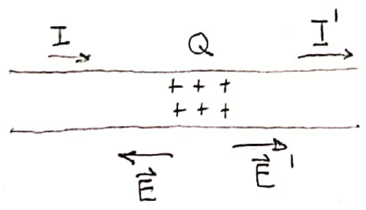
Hay dos fuerzas involucradas en sostener ésta corriente:

- una fuerza (por unidad de carga) $\vec{f}_0$, localizada en la batería
- una fuerza electrostática distribuída en el circuito.

De modo que la fuerza por unidad de carga es:

(198.1) $$\vec{f} = \vec{f}_0 + \vec{E}$$

obs:



si hay una fluctuacion en la corriente se origina una aqumulación de carga que genera campos $\vec{E}$ y $\vec{E}'$ que tienden a deshacer la acumulación!

obs: $\vec{f}_0$ es producida por mecanismos externos al campo, por ejemplo por potenciales químicos en una batería, mecánicos en el caso de un van de Graaf, etc.

Definimos la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ en el circuito como

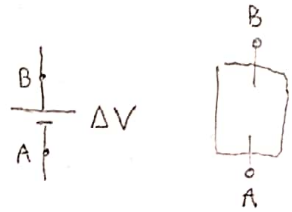
(198.2) $$\mathcal{E} \equiv \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} \qquad \text{con } \vec{f} = \vec{f}_0 + \vec{E}$$

Para el caso de campos electrostáticos:

(198.3) $$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

(198.4) $$\therefore \quad \mathcal{E} = \oint \vec{f}_0 \cdot d\vec{l}$$

Dentro de una fuente ideal, de resistencia interna nula, la fuerza neta por unidad de carga es nula: $\vec{f} = \vec{0}$



(199.1) $\vec{f}_0 = -\vec{E}$

La diferencia de potencial entre las terminales A y B de la fuente es

(199.2) $\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{f}_0 \cdot d\vec{l}$

Como la fuerza $\vec{f}_0$ esta localizada en la batería y vale cero en el resto del circuito, podemos extender la integral a todo el circuito sin cambiar el resultado:

(199.3) $\int_A^B \vec{f}_0 \cdot d\vec{l} = \oint \vec{f}_0 \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$ (por ec. 198.4)

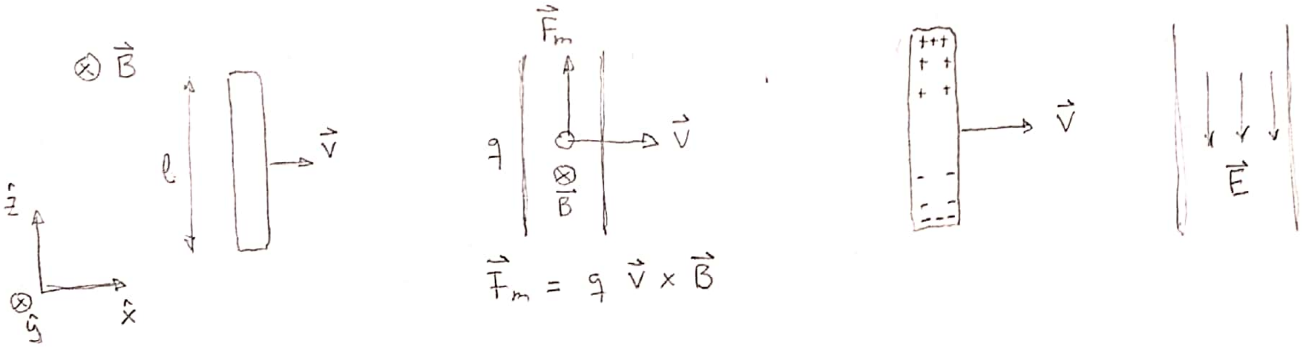
$\therefore \ \Delta V = \mathcal{E}$

En otras palabras, la batería tiene el efecto de establecer una diferencia de potencial $\Delta V = \mathcal{E}$ entre sus terminales.

Scanned with CamScanner

Fuente electromotriz de movimiento.

Supongamos por un momento que una varilla conductora se mueve por un campo magnético uniforme con cierta velocidad



Los portadores de carga del conductor se están moviendo con velocidad $\vec{v}$ dentro de un campo magnético $\vec{B}$, por lo que habrá una fuerza magnética sobre éstos

(1) $$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B} = q\,v\,B\,\hat{z}$$

en la dirección $\hat{z}$.

Los portadores, supuestos positivos, se moverán hacia un extremo de la varilla dejando una carga de signo opuesto en el otro extremo.

El sistema llega al equilibrio cuando las cargas desplazadas generan un campo eléctrico $\vec{E}$ en la dirección $(-)\,\hat{z}$ que se opone a la fuerza magnética: En el equilibrio las fuerzas sobre las cargas suman cero, con lo que

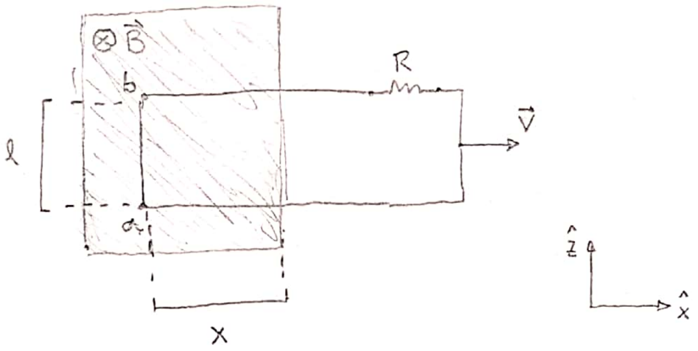
(2) $$\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = -\,v\,B\,\hat{z}$$

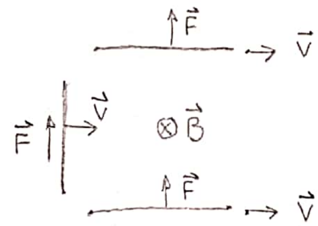
En estas condiciones habrá una diferencia de potencial entre los extremos de la varilla

(3) $$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = v\,B\,\ell$$

Este es el principio de los generadores de fem.

Imaginemos ahora un circuito que se encuentra parcialmente en un campo magnético uniforme.





$$\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

El circuito consiste de un hilo conductor rectangular conectado a una resistencia R – por ejemplo una lamparita. En la región rectangular sombreada hay un campo magnético externo uniforme $\vec{B}$ que apunta hacia la hoja.

Tiramos del circuito hacia la derecha con una velocidad $\vec{v}$ constant.

Sobre los segmentos conductores que se mueven en la región ocupada por el campo magnético tenemos una fuerza

$$\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

La fuerza es perpendicular al hilo en los segmentos laterales y por lo tanto no tiene ningún efecto.

Sobre el segmento transversal, la fuerza genera un desplazamiento de los portadores de carga dando lugar a una fem.

La fuerza por unidad de carga es de origen magnético:

$$\vec{f} = \vec{f}_m = \vec{v} \times \vec{B}$$

Luego la fem es

porque $\vec{v} \times \vec{B} \perp d\vec{l}$ en los otros tramos y $\vec{B} = \vec{0}$ en el resto del circuito.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{f}_m \cdot d\vec{l} = \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b v B \, dl = v B l$$

Aclaración: si bien el circuito está en movimiento, la definición de la fem es instantánea. Es decir,

$$\mathcal{E} \equiv \oint \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

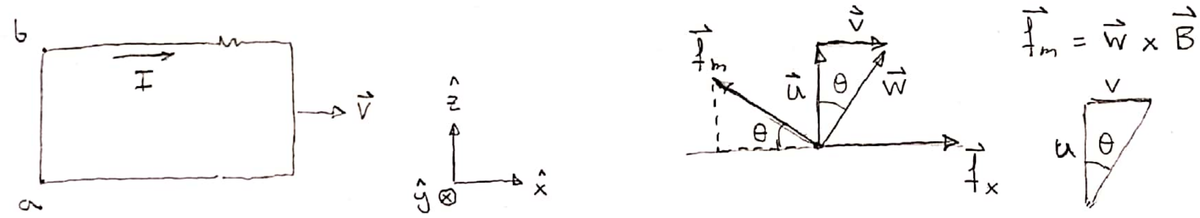
se calcula recorriendo el circuito en un instante de tiempo fijo.
Formalmente: $d\vec{l} = dl\,\hat{z}$ en el tramo $\overline{ab}$.

Al establecerse una fem en el circuito habrá una corriente. Esta corriente está disipando energía en la resistencia R. Para mantener la corriente estacionaria, algo/alguien tiene que estar haciendo trabajo.

¿El campo magnético? No!

Las fuerzas magnéticas no realizan trabajo! $\vec{F} \perp \vec{v}_q$

El campo magnético es responsable de establecer la fem $\mathcal{E}$, pero quien realiza trabajo es quien está tirando del circuito para mantener una velocidad constante $\vec{v}$. Veamos como.



Cuando la corriente I circula por el circuito, generada por la fem $\mathcal{E}$, los portadores de carga adquieren una velocidad $\vec{u}$ a lo largo del hilo que va de $\underline{a}$ a $\underline{b}$, que se suma a la velocidad $\vec{v}$ que tienen por el movimiento de todo el circuito.

La fuerza magnética por unidad de carga $\vec{f}_m$ tendrá por lo tanto una componente en la dirección $(-\hat{x})$:

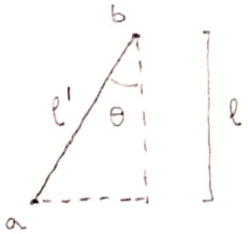
$$\vec{f}_m = \vec{w} \times \vec{B} = (\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{B} = \vec{v} \times \vec{B} + \vec{u} \times \vec{B}$$

$$= (v\,\hat{x}) \times (B\,\hat{y}) + (u\,\hat{z}) \times (B\,\hat{y}) = vB\,\hat{z} - \underline{uB\,\hat{x}}$$

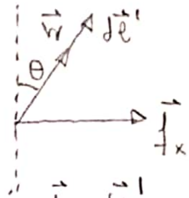
Para que el circuito se siga moviendo con una velocidad constante $\vec{v} = v\,\hat{x}$, alguien tiene que contrarrestar ésta fuerza aplicando una fuerza externa $\vec{f}_x = uB\hat{x}$.

obs: los portadores de carga están confinados en el cable, por lo que esta fuerza externa es transmitida a las cargas por la estructura del cable (pueden pensar en las paredes del cable).

Las cargas se mueven entonces con una velocidad $\vec{w}$.



$$l = l'\cos\theta \Rightarrow l' = \frac{l}{\cos\theta}$$



$$\vec{f}_x \cdot \vec{dl}' = f_x\, dl' \underbrace{\cos(\pi/2 - \theta)}_{=\sin\theta}$$

Para ir del punto a al punto b del circuito, deben atravesar una distancia $l' = l/\cos\theta$.

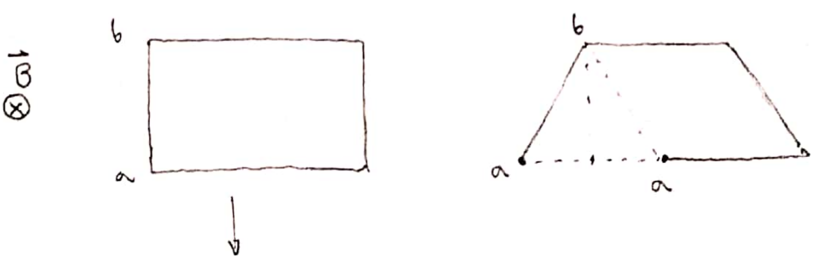
El trabajo por unidad de carga que debemos realizar en el tramo $a-b$ es:

$$\int \vec{f}_x \cdot \vec{dl}' = \int f_x\, dl' \sin\theta = \int uB \sin\theta\, dl' = uB\sin\theta \int dl' = uBl'\sin\theta$$

$$= uB \cdot \frac{l}{\cos\theta}\sin\theta = uBl \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = uBl\, tg\,\theta = uBl \cdot \frac{v}{u} = Blv.$$

$$\therefore \int \vec{f}_x \cdot \vec{dl}' = Blv = \mathcal{E}.$$ (ver dos páginas atrás)

- Es decir: el trabajo por unidad de carga realizado por la fuerza externa es igual a la fem $\mathcal{E}$
- obs: los tramos en $\hat{x}$ no contribuyen al trabajo externo ya que allí la fuerza magnética es $\perp$; el tramo restante está fuera de la región donde hay un campo $\vec{B} \Rightarrow \vec{f} = \vec{0}$ allí.
- obs: los circuitos de integración son distintos para $\mathcal{E}$ y para el trabajo



$\mathcal{E} = \oint \vec{f} \cdot \vec{dl}$

$\int \vec{f}_x \cdot \vec{dl}'$

Ley del flujo.

La fem de un circuito en movimiento puede reescribirse de una manera que resulta útil, en función del flujo magnético:

(1) $$\phi \equiv \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

El flujo magnético a través del circuito está dado por

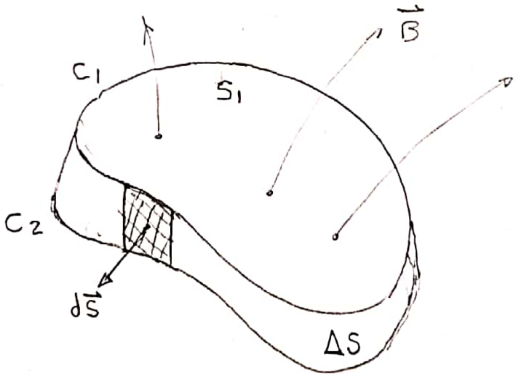
(2) $$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = B.(\ell x)$$

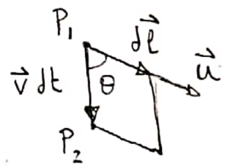
donde ℓx es la superficie en la que el campo es no nulo.

(3) $$\frac{d\phi}{dt} = B\ell . \frac{dx}{dt} = -B\ell v \quad \dots \quad = -\mathcal{E}$$

(4) $$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}}$$ ley de flujo para fem de movimiento.

Si bien la hemos obtenido en un caso muy particular, la validez de (4) es mucho más general. Para verlo, consideremos un lazo que se mueve en un campo magnético.





$ds = v\,dt\,d\ell$

$d\vec{s} \perp (\vec{v} \times d\vec{\ell})$

$d\vec{s} = (\vec{v}\,dt) \times d\vec{\ell}$

C_1 muestra el contorno del lazo a tiempo t y C_2 a tiempo $t+dt$, un instante posterior. Para calcular la variación del flujo

$$d\phi = \phi(t+dt) - \phi(t) = \phi_{S_2} - \phi_{S_1}$$

consideramos una superficie S_1 de borde C_1 a tiempo t y a tiempo $t+dt$ consideramos la superficie S_2 formada por $S_1 \cup \Delta S$ donde ΔS es la banda que tiene por bordes los contornos C_1 y C_2.

La diferencia del flujo es entonces, el flujo a través de la banda:

$$d\phi = \phi_{S_2} - \phi_{S_1} = \phi_\Delta = \int_\Delta \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Si consideramos un punto P_1 en el contorno C_1, un tiempo dt posterior se habrá movido a un punto P_2 en C_2. Si la velocidad del lazo en ese punto es $\vec{v}$, el desplazamiento es $\vec{v}\,dt$.

Si llamamos $\vec{u}$ a la velocidad de una carga a lo largo del hilo que forma el lazo, la velocidad neta de una carga en P_1 es $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$

El elemento de área dela banda en ese punto se puede escribir:

$$d\vec{S} = (\vec{v}\,dt) \times d\vec{l}$$

$$d\phi = \int_\Delta \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \vec{B} \cdot [(\vec{v}\,dt) \times d\vec{l}]$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \int \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l})$$

usando $\vec{v} = \vec{w} - \vec{u}$

$$\vec{v} \times d\vec{l} = (\vec{w} - \vec{u}) \times d\vec{l} = \vec{w} \times d\vec{l} - \vec{u} \times d\vec{l}$$

pero $\vec{u} \parallel d\vec{l}$ $\therefore$ $\vec{u} \times d\vec{l} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \vec{v} \times d\vec{l} = \vec{w} \times d\vec{l}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \int \vec{B} \cdot (\vec{w} \times d\vec{l})$$

Recordando que $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

podemos escribir $\vec{B} \cdot (\vec{w} \times d\vec{l}) = d\vec{l} \cdot (\vec{B} \times \vec{w}) = -(\vec{w} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\oint (\vec{w} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

El producto vectorial $\vec{w} \times \vec{B}$ no es ni más ni menos que la fuerza magnética por unidad de carga sobre los portadores que se mueven con velocidad $\vec{w}$:

(1) $$\vec{f}_m = \vec{w} \times \vec{B}$$

Resulta entonces:

(2) $$\frac{d\phi}{dt} = - \oint \vec{f}_m \cdot d\vec{l}$$

y como $\oint \vec{f}_m \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$

(3) $$\boxed{\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt}}$$

<u>Obs</u>: hay una ambiguedad en el signo tanto de $\mathcal{E}$ como ϕ

$\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l}$: sentido de circulación de C

$\phi \equiv \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$: orientación de la superficie S.

Los signos se eligen consistentemente como siempre, por la regla de la mano derecha. Es decir: si circulo C en la dirección que se enrollan los dedos, el pulgar nos da la orientación de la superficie $\vec{S}$.

<u>obs</u>: si el calculo de la fem no da negativo, quiere decir que la corriente circulará en la dirección contraria alrededor del circuito.

<u>obs</u>: ATENTI a las condiciones en las que fue derivada la ec.(3)

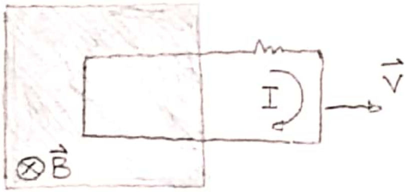
<u>vale</u> para lazos en movimiento (traslacion, rotacion) que pueden cambiar de forma (estirarse, distorsionarse) de manera continua.

<u>No</u> vale cuando hay interruptores (que puedan cambiar el area del circuito), contactos deslizantes en algún punto del circuito, conductores extendidos (> 1D) que impiden definir un circuito de corriente sin ambiguedades.

Inducción electromagnética y Ley de Faraday

Faraday realizó (~ 1830) una serie de experimentos que pusieron en evidencia las limitaciones de las leyes de la electro-magnetostática. Vamos a resumir tres de ellos:

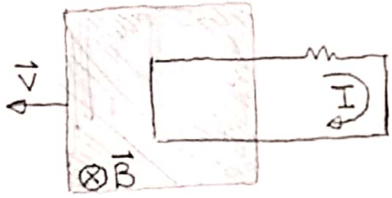
(1)



- Si un lazo conductor (un circuito) se mueve en presencia de un campo magnético no uniforme $\vec{B}$,

  $\Rightarrow$ se induce una corriente en el lazo.

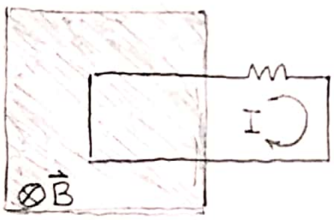
(2)



- Si el lazo permanece en reposo, y se mueve la fuente del campo magnético $\vec{B}$,

  $\Rightarrow$ se induce una corriente en el lazo.

(3)



$\vec{B} = \vec{B}(t)$

- Tanto el lazo conductor como la fuente de $\vec{B}$ permanecen en reposo, pero la intensidad del campo magnético varía en el tiempo: $\vec{B} = \vec{B}(t)$,

  $\Rightarrow$ se induce una corriente en el lazo.

- El experimento (1) es un caso de fem de movimiento, como el que acabamos de estudiar, donde:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

- El experimento (2) ya no es tan obvio. Especialmente en el momento en que Faraday hace este descubrimiento...

  Hoy, a la luz de la relatividad especial, podríamos anticipar (2) de (1) ya que lo que importa es el movimiento relativo que es el mismo en ambos casos.

  Sin embargo, en el momento que Faraday hace éste experimento el resultado es intrigante!

- Piénsenlo: en el experimento (1) el hilo conductor se mueve en un campo magnético $\Rightarrow \exists$ una fuerza magnética sobre las cargas que genera una fem y da lugar a una corriente. Esto está claro.
- Pero en experimento (2) el hilo conductor está en reposo. Si bien la fuente de campo $\vec{B}$ se mueve, los portadores de carga están quietos: la fuerza que da lugar a la corriente no puede ser magnética.
- Ok, si no es el campo magnético, ¿Que otros campos conocen que puedan hacer una fuerza sobre cargas en reposo?

  Un campo eléctrico lo haría... pero no hay ninguna distribución de cargas presente que pueda dar lugar a $\vec{E} \neq \vec{0}$! (el conductor es neutro).

- La idea de Faraday:

  Un campo magnético dependiente del tiempo induce un campo eléctrico.

  En el experimento (2), cuando la fuente de campo inhomogéneo se mueve, en un punto determinado del espacio el campo magnético varía con el tiempo.

  Faraday observó experimentalmente que en el caso (2) hay una fem

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

  Si derivamos el flujo con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\phi = \frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\therefore \quad \boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}}$$

ley de Faraday en su forma integral

Si usamos el Teorema de Stokes para reescribir la integral de la circulación de $\vec{E}$:

(1) $$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

Como esta expresión vale para cualquier superficie, tenemos

(2) $$\boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$ Ley de Faraday.

obs: en el caso estático, donde $\vec{B} = \text{cte}$, $\nabla\times\vec{E} = \vec{0}$ como debe.

- El experimento (3) se explica naturalmente por la ley de Faraday ya que hay un campo magnético dependiente del tiempo que da origen a una fem

(3) $$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}}$$

Ley de Faraday y ley del flujo.

Los tres experimentos descriptos pueden resumirse en una ley del flujo

(4) $$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}}$$

Sin embargo, hay que distinguir los principios detrás de esta ley pueden ser diferentes:

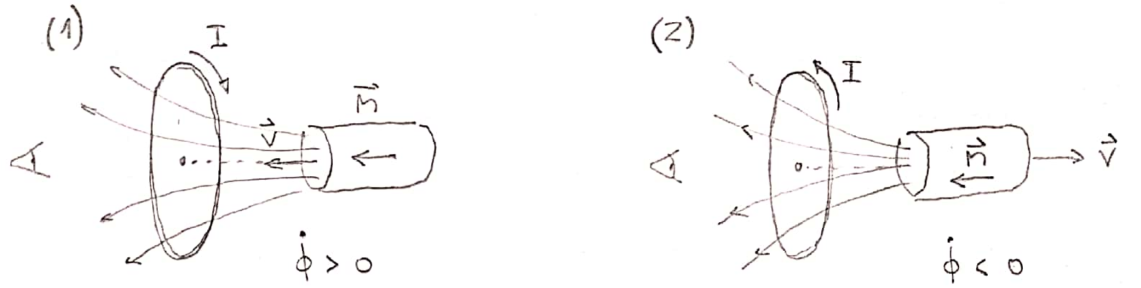
- en el experimento (1) se trata de la fuerza de Lorentz
- en los experimentos (2) y (3) se trata de un campo eléctrico inducido por un campo magnético variable: este principio es la ley de Faraday

obs: la coincidencia entre estos resultados fue lo que motivó a Einstein a buscar las razones y formular la Teoría de la relatividad especial.

Ley de Lenz.

La ley de Lenz nos proporciona una manera simple de determinar el efecto cualitativo de un flujo magnético variable:

$\boxed{\text{la corriente inducida se opone al cambio en el flujo}}$ Lenz



Imaginemos un objeto magnetizado cercano a un aro conductor.

(1) Cuando el imán se aproxima al aro, el flujo aumenta. La corriente que se induce en el aro circula en sentido horario, visto desde la izquierda, de modo que el campo magnético que ~~ll~~esta produce genera un flujo propio que se opone al cambio generado por la aproximación del imán.

(2) Cuando el imán se aleja, el flujo disminuye. La corriente inducida circulará en sentido anti-horario, dando lugar a un campo propio que tiende a oponerse al cambio de flujo.

<u>obs.</u> la ley de Lenz es una forma de determinar los signos en la ley de flujo sin hacer muchas cuentas.

- En el caso de situaciones como el experimento (1) es sencillo determinar el sentido de circulación de la corriente por la fuerza de Lorentz.

- En el caso de experimentos en los que interviene la ley de Faraday puede ser laborioso determinar los signos.