Repaso ley de Faraday

(1). $\mathcal{E} \equiv \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{l}$ def. fuerza electromotriz en un circuito

$\vec{f}$ es fuerza por unidad de carga

(2). un conductor en movimiento dentro de un campo magnético da lugar a una fem debida a la fuerza de Lorentz.

(3). un campo magnético variable en el tiempo induce un campo eléctric

Ley de Faraday.

(4) $$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

(5) $$\boxed{\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}}$$

• Ley del flujo: $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ (flujo magnético a través de S)

(6) $$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$ (incluye (2) y (3))

Ley de Lenz:

La naturaleza detesta que cambie el flujo.

Propiedades del campo inducido:

Las ecuaciones de para los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ con la modificación introducida por Faraday:

(212.1) $$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(212.2) $$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(212.3) $$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

(212.4) $$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Consideremos el caso $\rho \equiv 0$. Entonces el campo eléctrico está generado unicamente por un campo magnético cambiante:

(212.5) $$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

(212.6) $$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$ (donde abreviamos $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \partial_t \vec{B}$)

Observemos la similitud de este caso con las ecs. (3) y (4) para la magnetostática: $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ y

$-\partial_t \vec{B}$ juega el papel de la corriente; $\mu_0 \vec{J}$

Entonces podemos recurrir a las soluciones que conocemos para éste problema, las leyes de Biot - Savart y Ampére:

(212.7) $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r^2}\left(\vec{J}(\vec{r}\,') \times \hat{r}\right) dv \quad \text{y} \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

De manera análoga obtenemos

(212.8) $$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r^2}\left(\partial_t \vec{B} \times \hat{r}\right) dv \quad \text{y} \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Aproximación cuasiestática.

Al aplicar la ley de Faraday en la práctica, nos encontramos con problemas en los que $\vec{B} = \vec{B}(t)$. Sin embargo, quisieramos usar las leyes de la magnetostática para calcular $\vec{B}$, es decir las ecs. (212.5-6) o (212.7).

En problemas en los que la ley de Faraday es relevante, con campos magnéticos variables, no es rigurosamente correcto usar las leyes de la magnetostática.

En muchos problemas prácticos el error es sin embargo pequeño, y resulta una buena aproximación proceder de ésta manera.

- calcular los campos magnéticos por Ampere ó Biot Savart
- determinar el campo eléctrico por la ley de Faraday o usar la ley del Flujo.

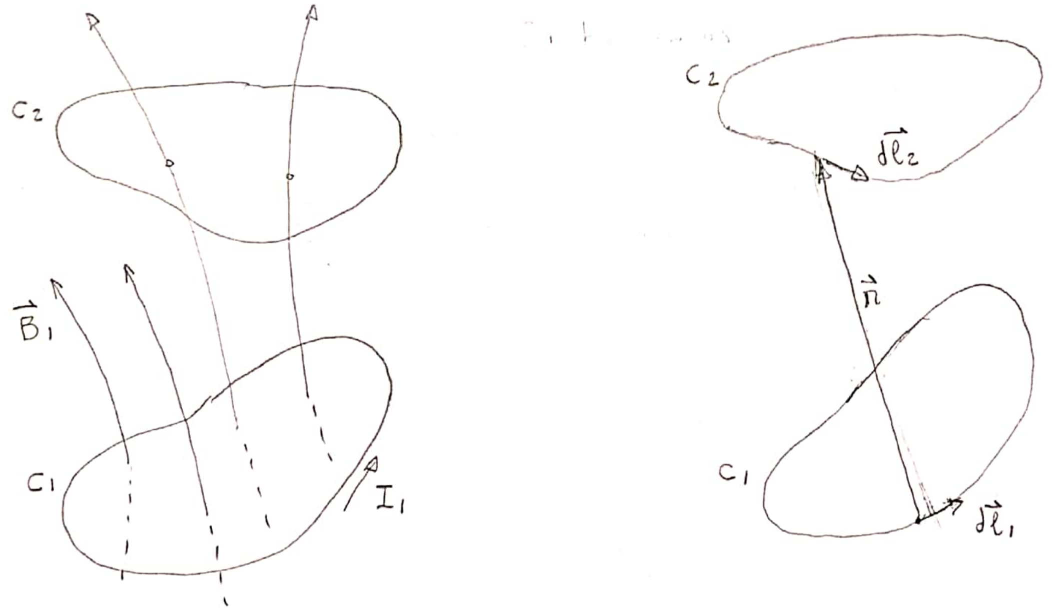
El régimen en el que esto es una buena aproximación se denomina cuasiestático (ó cuasiestacionario).

La aproximación se rompe cuando los campos varían extremadamente rápido ó cuando estamos considerando puntos del espacio muy lejanos a la fuente de los campos.

En general esto es así cuando se vuelve relevante la presencia de ondas electromagnéticas y radiacion EM.

Inductancia.

Imaginemos que tenemos dos lazos de cable, dos circuitos cerrados, por los que puede circular corriente.



- Si hacemos circular una corriente I_1 por el circuito C_1, esta producirá un campo magnético $\vec{B}_1$.
- Algunas de las líneas de campo $\vec{B}_1$ pasarán a través del circuito C_2 generando un flujo magnético ϕ_2.

Vamos a buscar una expresión para este flujo ϕ_2 debido a $\vec{B}_1$. Primero escribimos $\vec{B}_1$ por Biot – Savart eq. (147.6)

(214.1) $$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_1 \oint \frac{1}{r^2} (d\vec{l}_1 \times \hat{r})$$

En esta expresión vemos que, si bien no podemos calcular explícitamente el campo en una situación arbitraria, $\vec{B}_1$ resulta proporcional a la corriente I_1.

El flujo ϕ_2 sobre la espira C_2 es

(214.2) $$\phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2$$

con $\vec{B}_1$ dado por (214.1). Entonces, ϕ_2 también es proporcional a la corriente I_1 : $\phi_2 \propto I_1$

Podemos escribir:

(215.1) $$\phi_2 = M_{21}\, I_1$$

Introduciendo la constante de proporcionalidad M_{21}, que llamamos inductancia mutua entre los dos lazos.

Ahora, si escribimos el campo $\vec{B}_1$ en función del potencial vector

(215.2) $$\vec{B}_1 = \nabla \times \vec{A}_1$$

El flujo ϕ_2 puede también escribirse como

(215.3) $$\phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} (\nabla \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{S}_2$$

(215.4) $$\phi_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 \qquad \text{(por el teorema de Stokes)}$$

Recordando la expresión para el potencial vector de un hilo de corriente ec. (169.5)

(215.5) $$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{1}{r}\, d\vec{l}_1$$

La expresión para el flujo ϕ_2 queda

(215.6) $$\phi_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_2} \left(\oint_{C_1} \frac{1}{r}\, d\vec{l}_1 \right) \cdot d\vec{l}_2$$

reordenando un poco:

(215.7) $$\phi_2 = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{1}{r}\, d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 \right] I_1$$

Volviendo a (215.1) vemos que el corchete es M_{21}:

(215.8) $$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{1}{r}\, d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 \qquad \text{(formula de Neumann)}$$

Fijense que linda y simétrica esta expresion.
Como la doble integral de linea sobre los circuitos C_1 y C_2 se puede intercambiar, resulta $M_{12} = M_{21}$,

(216.1) $\boxed{M_{21} = M_{12} \equiv M.}$ (inductancia mutua)

Esto es asombroso, no? Quiere decir que si hacemos circular una corriente I por C_1, el flujo a través de C_2 es el mismo que el flujo a través de C_1 si hacemos circular I por C_2.

Es llamativo porque esto se cumple para cualquier C_1, C_2: los lazos pueden tener la forma que se les antoje y estar orientados como sea!

Otra consecuencia bonita de la expresión (215.8) es que deja claro que M depende solo de factores geométricos: las formas de C_1 y C_2, su orientación y posición relativa (a través del factor $(1/\mathfrak{r})$ en la integral).

- El interés de la inductancia mutua no es puramente teórico.

Imaginemos que variamos la corriente I_1, ,

El flujo Φ_2 en C_2 va a variar y de acuerdo con la ley de Faraday se va a inducir una fem en C_2

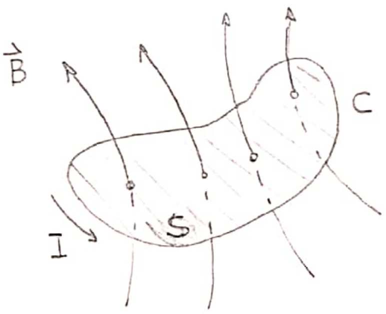
(216.2) $$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(MI_1) = -M \cdot \frac{dI_1}{dt}$$

(216.3) $$\therefore \mathcal{E}_2 = -M \cdot \dot{I}_1$$

obs: notemos de pasada que esta es una instancia de la aproximación cuasiestática que mencionamos antes, ya que en la derivación de la relación (215.1) empleamos la ley de Biot - Savart en (214.1), ... y ahora estamos permitiendo que la corriente I_1 en (214.1) dependa del tiempo; claramente nos llevamos por delante la magnetostática, en donde la suposición de partida es que las corrientes son estacionarias.

Autoinductancia.

Supongamos ahora que en vez de dos lazos tenemos uno solo, C, por el que puede circular una corriente.



La corriente I genera un campo mágnetico propio $\vec{B}$, que produce un flujo magnético ϕ a traves del lazo C. Si la corriente I varía, el flujo ϕ va a variar y por lo tanto Faraday nos dice que va aparecer una fem.

Siguiendo un razonamiento análogo al anterior, podemos mostrar que el campo va a ser proporcional a la corriente I,

(217.1) $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{1}{\mathfrak{r}^2} (d\vec{l}' \times \hat{\mathfrak{r}})$$

y por lo tanto tambien el flujo propio

(217.2) $$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

con lo que el flujo es, también, proporcional a la corriente

(217.3) $$\boxed{\phi = L I}$$

La constante de proporcionalidad L se llama autoinductancia o simplemente inductancia.

- Al igual que la inductancia mutua, L depende solo de la forma, y tamaño de C.

Para una corriente variable se induce una fem

(217.4) $$\boxed{\mathcal{E} = - L \frac{dI}{dt}}$$

- La inductancia (como la capacidad C) se define positiva.

- El signo (-) en (217.4) define el sentido de la fem inducida: siempre se opone al cambio de corriente $\dot{I}$. Si $\dot{I} > 0$, aparece una fem que tiende a frenar el crecimiento de la corriente. Si por el contrario la corriente disminuyera, $\dot{I} < 0$, la fem aparece oponiéndose a este cambio.

- La inductancia es parecida a una inercia, cumple un rol parecido al de la masa en un sistema mecánico: para valores mayores de L, mas cuesta cambiar la corriente.

- Las unidades de L son los Henry (H).

- Las inductancias son muy útiles en circuitos de corriente variable, pero eso lo vamos a estudiar más adelante.

Energía en un campo magnético.

Supongamos que queremos establecer una corriente en un circuito. Vamos a tener que realizar un trabajo para conseguir una corriente estacionaria, de acuerdo con lo que acabamos de ver. ↑

- Atenti: no estamos hablando del trabajo que se pierde en forma de disipación térmica por efecto Joule en las resistencias del circuito (si las hay).

Como vimos, un circuito cerrado puede tener autoinductancia. Esto hace que si intentamos establecer una corriente, digamos empezando de cero (ausencia de corriente) hasta cierto valor I, va a aparecer una fem inducida que se opone a este cambio. Para conseguir aumentar la corriente vamos a tener que hacer un trabajo en contra de esta fem.

Supongamos que el circuito tiene una inductancia L. Al cambiar la corriente aparece la fem

(219.1) $$\mathcal{E} = -L\dot{I} \qquad (\text{ec. } 217.4)$$

El trabajo que hacemos nosotros, por unidad de carga, para dar una vuelta al circuito es $W_{nos} = -\mathcal{E}$ sobre una carga dq

(219.2) $$dW = -\mathcal{E}\, dq$$

como $I = \frac{dq}{dt}$ es la cantidad de carga por unidad de tiempo que pasa por un punto del circuito, resulta $dq = I\,dt$

(219.3) $$dW = -\mathcal{E} I\, dt.$$

con la fem dada por (219.1)

$$dW = L I \dot{I}\, dt = L I \frac{dI}{dt}\, dt$$

(219.4) $$dW = L I\, dI$$

Integrando esta ecuación con una corriente que va de cero a un valor final I:

$$W = \int dW = \int_0^I L I' dI' = L \int_0^I I' dI' = L \frac{I^2}{2} = \frac{1}{2} L I^2$$

Es decir que el trabajo que debemos realizar (nosotros o una batería) en contra de la fem inducida es

(220.1) $$\boxed{W = \frac{1}{2} L I^2}$$

obs: W no depende de la manera en que establezcamos la corriente (si lo hacemos, lentamente, rapidamente). Solo depende del valor final de la corriente y de parámetros geométricos del circuito que determinan L.

obs: el trabajo realizado no se disipa, sino que queda almacenado en forma de energía en la corriente que ahora circula por el circuito. Esta corriente tiene en cierta forma una "inercia": así como hubo que hacer trabajo para establecerla, si queremos cambiarla (por ejemplo apagarla) va a aparecer nuevamente una fem inducida que tiende a mantener la corriente.

La energía puede reescribirse (en manera análoga a lo que hicimos en electrostática) en términos del campo magnético. El flujo magnético a través del lazo del circuito es

(220.2) $$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$ (escribiendo el campo $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$)

por el teorema de Stokes,

(220.3) $$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

(220.4) $$\therefore \; \phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Ahora, como vimos hace un rato el flujo es proporcional a la corriente. En función de la inductancia tenemos ec. (217.3)

(221.1) $$\phi = L I$$

Igualando estas expresiones

(221.2) $$L I = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Reemplazamos esta expresión en la formula para el trabajo ec. (220.1) :

(221.3) $$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \cdot (L I) = \frac{1}{2} I \cdot \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Como $d\vec{l}$ es un desplazamiento a lo largo del circuito C por el que circula la corriente I podemos escribir

(221.4) $$I \, d\vec{l} = \vec{I} \, dl$$

con lo que

(221.5) $$\boxed{W = \frac{1}{2} \oint (\vec{A} \cdot \vec{I}) \, dl}$$

Generalizando al caso de corrientes distribuidas en un volumen

$$\vec{I} \to \vec{J} \quad , \quad dl \to dv \quad , \quad \oint_c \to \int_V$$

(221.6) $$\boxed{W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{J}) \, dv}$$

En esta expresión, podemos usar la ley de Ampére para reescribir $\vec{J}$,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

con lo que

(221.7) $$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \, dv$$

REC. Buscamos reescribir W en función de $\vec{B}$; por lo que intentamos integrar para sacarnos de encima $\vec{A}$. Para eso re-escribimo el integrando (recordamos la identidad que demostramos en p. 156')

(221.8) $$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

y como $\nabla\times\vec{A} = \vec{B}$

$$\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{B} - \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

Con esto la expresión para el Trabajo queda

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathcal{V}} B^2\, d\mathcal{V} - \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\, d\mathcal{V}$$

Usando el teorema de la divergencia en el segundo término

(222.1) $$W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathcal{V}} B^2\, d\mathcal{V} - \frac{1}{2\mu_0}\oint_{S} (\vec{A}\times\vec{B})\cdot d\vec{s}$$

La superficie de integración S en la segunda integral es el borde del volumen $\mathcal{V}$. Este volumen es el que contiene la corriente $\vec{J}$ en la ec. (221.6). Si aumentamos el volumen de integración en (221.6), el resultado de la integral no cambia porque $\vec{J} = \vec{0}$ fuera de $\mathcal{V}$. En la expresión (222.1) debe suceder lo mismo: W no cambiará al incrementar $\mathcal{V}$. Sucede que mientras la primera integral aumenta ($B^2 > 0$ y el volumen de integracion esta creciendo) la segunda integral decrece (porque S se aleja de la fuente, con lo que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ decrecen). Podemos extender la integral a Todo el espacio, de modo que la segunda integral se anula y obtenemos:

(222.2) $$\boxed{W = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\, d\mathcal{V}}$$ (integrando sobre Todo el espacio)

Esta expresión para la energia muestra que podemos interpretar que la energía que se invierte en generar la corriente/campo está almacenada en el campo magnético, con una densidad de energía por unidad de volumen:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Comentario.

¿Cómo es que hay energía en un campo magnético, si los campos magnéticos no realizan trabajo?

Atrás de todo esto está la ley de Faraday.

Para producir un campo magnético en una región en la que no lo hay, debemos cambiar el campo $\vec{B}$. Entonces $\vec{B} = \vec{B}(t)$ y por la ley de Faraday esto da lugar a un campo eléctrico: $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$. Es este campo eléctrico el que realiza trabajo.

Si pensamos en el proceso completo de establecer un campo magnético, ni al comenzar ni al completar el proceso hay campo eléctrico, pero durante el proceso, inevitablemente hay un campo $\vec{E}$, y es en contra de este campo que realizamos un trabajo para lograr establecer un campo $\vec{B}$ final.

En resumen, la energía magnética tiene un origen dinámico, y por ese motivo no pudimos discutir este tema en el contexto de magnetostática.

Finalmente, comparamos las expresiones de la energía magnética con la electrostática:

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 \, dv$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, dv$$